# MODELO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO CEP-EOQ

# MODELO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO CEP-EOQ

Politécnico Grancolombiano nos dice que:

> El modelo de la cantidad económica a pedir (EOQ) es aplicable cuando la demanda de un determinado producto es constante o prácticamente constante, o cuando la cantidad de su pedido llega al inventario en un punto del tiempo. La teoría de la demanda constante nos dice que cada lapso es extraído en números iguales de unidades (5 unidades cada día, 25 unidades cada semana, 100 unidades en cada lapso de 4 semanas etc.).
>
> La decisión del pedido requiere definir una cantidad que se mantenga en medio de:
>
> (1) Mantener inventarios pequeños y ordenar mucho de forma frecuente y
>
> (2) Mantener inventarios grandes y ordenar poco de manera frecuente;
>
> La primera opción podría generar costos muy altos, mientras que la segunda podría resultar en gastos de posesión demasiado elevados. Es necesario crear un modelo matemático que nos ayude a encontrar el mejor término medio para estas dos situaciones y que nos muestre la suma de los gastos de posesión y de los costos de pedido.
>
> Los costos de posesión son los que involucran el mantenimiento de cierto nivel de inventarios, estos costos varían de acuerdo con el tamaño del inventario. Primero, se tiene el costo de financiamiento de inventario; si la empresa necesita de un préstamo monetario, entonces incurre en un cargo por intereses, pero si la empresa utiliza su propio capital sufre de un costo de oportunidad que significa que ya no podrá utilizar ese dinero en otra clase de inversión. En ambos casos, existe un costo por interés relacionado con el capital congelado en inventarios.
>
> El costo de capital generalmente se expresa como un porcentaje de la inversión. Existen otros costos de posesión como primas de seguros, impuestos, desperfectos, robo de mercancía y gastos generales del almacén que también dependen del valor de inventario, así que se puede decir que el costo total de posesión para un inventario es del 25 % del valor de este.
>
> Ahora se necesita determinar el costo de pedir, este costo no cambia sin importar la cantidad del pedido y cubre la preparación, requisición, procesamiento de pedido, pago, correo, teléfono, transporte, verificación de facturas, recepción y otros aspectos.

Elementos que hay que conocer antes de utilizar el modelo EOP

1. El costo de pedir,

2. el costo de pedido y

3. la información de la demanda.

Uso de los administradores del modelo EOQ

Es necesario determinar si el resultado dado por el modelo EOQ es la decisión definitiva o si se necesita que el administrador intervenga para establecer la política final de inventarios; aunque el modelo haya proveído una buena opción de cantidad a pedir, es posible que algunos aspectos de la situación de inventarios no hayan sido considerados. En este caso, el administrador podría alterar la cantidad a pedir para igualar la demanda a la de un lapso determinado y así mantener un ciclo constante de pedidos.

**EL ADMINISTRADOR TAMBIÉN PUEDE RECOMENDAR UN PUNTO DE REORDEN CON EL QUE LA EMPRESA SE PROTEGERÍA DE EVENTUALIDADES COMO PEDIDOS QUE EXCEDAN AL PROMEDIO.**

El administrador también puede recomendar un punto de reorden con el que la empresa se protegería de eventualidades como pedidos que excedan al promedio o escasez de inventario y, aunque en algunos casos la demanda no sea tan alta como la cantidad de inventario existente, esas unidades sobrantes pueden utilizarse para respaldar un pedido inesperado que sobrepase el promedio, a esto se reconoce como inventario de seguridad.

Decisiones como cambios en la cantidad de pedido y el punto de reorden son de juicio, y en este caso no se tomaron pensando en un objetivo de costo mínimo, pero sirven para demostrar la forma en la que el juicio del administrador puede trabajar junto al modelo de decisión de inventarios para llegar a la mejor política posible de inventarios.

Modelos de inventarios EOQ

Cuando las hipótesis cambian, se necesita tener un modelo de inventarios diferente con distintas políticas de operación óptima.

Resumen de las hipótesis del modelo CEP-EOQ

- La demanda D es determinística y ocurre a tasa constante.
- La cantidad de pedido Q es igual para todos los pedidos; el nivel de inventario en Q unidades crece cada vez que un pedido es recibido.(págs. 1-3)

Thaja (2012) nos dice que lo que provoca más dificultades en el inventario es el almacenamiento en reserva de un determinado artículo para satisfacer las fluctuaciones de la demanda. El exceso de existencias de un artículo aumenta el costo del capital y de almacenamiento, y la escasez de existencias interrumpe la producción o las ventas. Se busca como resultado un nivel de inventario que balancee las dos situaciones extremas minimizando una función de costo apropiada.

La dificultad se reduce a controlar el nivel del inventario diseñando una política de inventario que conteste a dos preguntas:

1. ¿Cuánto se requiere pedir?
2. ¿Cuándo lo voy a pedir?

Miren la siguiente fórmula de costo genérica, que viene a ser la base del modelo de inventario.

**Costo total de inventario =** Costo de compra + Costo de preparación + Costo de retención + Costo por escasez

a. El costo de compra:es determinado por el precio por unidad de un artículo del inventario. Es importante considerar cuando al artículo se le ha incorporado un descuento, ya sea porque la cantidad del pedido excede una cantidad determinada. Esto influye al momento de tomar la decisión de cuánto pedir.

b. El costo de preparación: es determinado por el cargo fijo en que se da al momento de colocar un pedido (el tamaño no importa).

c. El costo de retención (almacenamiento): constituye el costo de mantener las existencias de cualquier cosa. Toma en cuenta el interés sobre el capital y el costo del almacenamiento, mantenimiento y administración.

d. El costo por escasez (faltante): es la penalización que se produce cuando se acaban las existencias. Contiene la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de pérdida de lealtad y confianza del cliente.

Los costos descritos son complicados, debido a que el incremento de uno puede provocar la reducción de otro (puede darse el caso que pedir con más frecuencia eleva el costo de preparación, pero disminuye el costo de retención del inventario).

El propósito de la minimización de la función de costo del inventario total es balancear estos costos conflictivos.

Un sistema de inventario podría necesitar revisiones periódicas (mencionamos que se puede dar el caso de pedir al inicio de cada semana o cada mes).

Simultáneamente, el sistema puede estar basado en revisiones continuas, que colocan un nuevo pedido cuando el nivel del inventario se reduce a un punto de pedir de nuevo algo específico. En la realidad, los dos tipos ocurren en tiendas al menudeo.

La revisión es periódica, si el artículo es repuesto cada semana o cada mes. Es continua, si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario se disminuye por debajo de un nivel definido.

## EL PAPEL DE LA DEMANDA EN EL DESARROLLO DE MODELOS DE INVENTARIO

Normalmente, lo complejo de los modelos de inventario va a depender de si la demanda es determinística o probabilística. Dentro de ambas condiciones, la demanda podría variar o no con el tiempo. Mencionemos este caso, el consumo de gas natural que se utiliza en la calefacción doméstica es estacional. Aun cuando dicho patrón se repite anualmente, el consumo en un mismo mes puede variar de un año a otro, dependiendo, por ejemplo, de la severidad del clima.

**LO COMPLEJO DE LOS MODELOS DE INVENTARIO VA A DEPENDER DE SI LA DEMANDA ES DETERMINÍSTICA O PROBABILÍSTICA.**

A continuación, veremos el patrón de la demanda en un modelo de inventario que se adjudica a la siguiente clasificación:

a. Determinístico y constante (estático) con el tiempo.

b. Determinístico y variable (dinámico) con el tiempo.

Comentamos que la primera clasificación es la más sencilla analíticamente y la más probable que ocurra en la práctica.

Nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable?

Una "estimación aproximada" inicial se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo durante un periodo específico. Mencionaremos el caso mensualmente.

Según Taha (2012), puede usarse el coeficiente de variación para valorar la naturaleza de la demanda.

**v = Desviación estándar/Media * 100**

Usando el siguiente lineamiento:

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es "de manera aproximada" constante y V es razonablemente pequeño (<20 %), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante.

2. Si la demanda mensual promedio varía de manera considerable entre los diferentes meses, pero V permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.

Revisemos el siguiente ejemplo usando como fuente Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson adaptado a una realidad cercana

Los datos que aparecen en la tabla 1 proporcionan el consumo mensual (octubre a setiembre según periodo fiscal en Costa Rica) de gas para cocinar en una residencia rural a lo largo de 10 años (2000-2009). El proveedor envía un camión para llenar el tanque a petición del dueño de la casa.

Desde el punto de vista del modelado de inventarios, es razonable suponer que cada mes re- presenta un periodo de decisión para la colocación de un pedido.

Analizaremos con este ejemplo la naturaleza de la demanda.
Un examen de la media y el coeficiente de variación (V) en la tabla 1 revela dos resultados:

1. El consumo promedio es dinámico (no constante) debido al alto consumo promedio durante los meses invernales.

2. El coeficiente de variación V es pequeño (<15%) de modo que la demanda mensual puede considerarse aproximadamente determinística.

La conclusión es que la demanda mensual es (aproximadamente) determinística pero variable.

| AÑO | OCT. | NOV. | DIC. | ENE. | FEB. | MAR. | ABRI. | MAY. | JUN. | JUL. | AGO. | SEP. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 100 | 110 | 90 | 70 | 65 | 50 | 40 | 42 | 56 | 68 | 88 | 95 |
| 2001 | 110 | 125 | 98 | 80 | 60 | 53 | 44 | 45 | 63 | 77 | 92 | 99 |
| 2002 | 90 | 100 | 88 | 79 | 56 | 57 | 38 | 39 | 60 | 70 | 82 | 90 |
| 2003 | 121 | 130 | 95 | 90 | 70 | 58 | 41 | 44 | 70 | 80 | 95 | 100 |
| 2004 | 109 | 119 | 99 | 75 | 68 | 55 | 43 | 41 | 65 | 79 | 88 | 94 |
| 2005 | 130 | 122 | 100 | 85 | 73 | 58 | 42 | 43 | 64 | 75 | 80 | 101 |
| 2006 | 115 | 100 | 103 | 90 | 76 | 55 | 45 | 40 | 67 | 78 | 98 | 97 |
| 2007 | 130 | 115 | 100 | 95 | 80 | 60 | 49 | 48 | 64 | 85 | 96 | 105 |
| 2008 | 125 | 100 | 94 | 86 | 79 | 59 | 46 | 39 | 69 | 90 | 100 | 110 |
| 2009 | 87 | 80 | 78 | 75 | 69 | 48 | 39 | 41 | 50 | 70 | 88 | 93 |
| Media | 111.7 | 110 | 95 | 82.5 | 69.6 | 55.3 | 42.7 | 42.2 | 62.8 | 77.2 | 90.7 | 98 |
| Desv. est. | 15.54 | 15.2 | 7.5 | 7.99 | 7.82 | 3.95 | 3.4 | 2.86 | 6.09 | 6.91 | 6.67 | 6 |
| V (%) | 13.91 | 13.8 | 7.9 | 9.68 | 11.24 | 7.13 | 7.96 | 6.78 | 9.69 | 8.95 | 7.35 | 6.1 |

TABLA.1 Consumo mensual de gas para cocinar (octubre a setiembre)

## MODELOS ESTÁTICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICO (EOQ)

En este módulo, veremos dos variaciones del modelo de cantidad de pedido económico (CPE), el cual van a encontrar en inglés con las siglas EOQ. La demanda se maneja estática (constante). Estaremos referenciando el EOQ como CPE-EOQ.

Según Taha (2012) estaremos estudiando dos modelos el CPE-EOQ clásico y el CPE-EOQ con reducciones de precios.

1. Modelo CPE-EOQ clásico

Es el más simple de los modelos de inventario, implica una demanda de tasa constante con reposición de pedidos instantánea y sin escasez.

Definimos entonces:

y = Cantidad de pedido (número de unidades)
D = Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)
$t_0$ = Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)

El nivel de inventario es dirigido por el patrón ilustrado en la siguiente figura, lo denominamos el patrón de inventario en el modelo CPE-EQQ clásico.

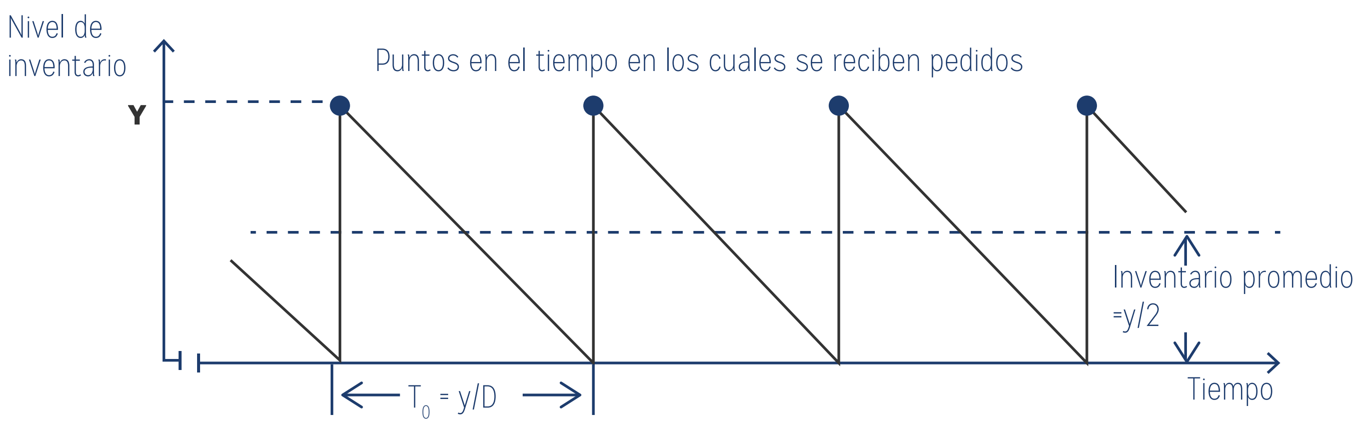



Figura 1. Patrón de inventario en el modelo CPE-EQQ clásico Fuente: Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Sucede que si tenemos un inventario con un nivel cero, inmediatamente se recibe un pedido de "y" unidades de tamaño.

Definimos que las existencias se van terminando uniformemente a una tasa de demanda constante, D.

El ciclo de pedido de este patrón es

$T_0$ = y/D unidades de tiempo

Vamos a manejar en este modelo de costo dos parámetros. _

i. K = Costo de preparación que lo ligamos con la colocación de un pedido (colones por pedido)

ii. h = Costo de retención (colones por unidad de inventario por unidad de tiempo)

Dado que el nivel de inventario promedio es:

y/D

Costo total por unidad de tiempo= CTU

CTU(y) = Costo de preparación por unidad de tiempo + Costo de retención por unidad de tiempo

= (Costo de preparación + Costo de retención por ciclo t0) / t0

Es importante que anote estas fórmulas que se van a utilizar en los ejemplos.

El valor óptimo de la cantidad de pedido "y" se calcula minimizando el CTU(y).

Vamos a suponer que "y" es continua, esta es una condición fundamental para la optimalidad. Estudiemos la siguiente fórmula:

$(d\ CTUy / dy) = -\ KD/ y^2\ - h/2 = 0$

La condición también es suficiente porque CTU(y) es convexa.

La solución de la ecuación da por resultado el CPE-EQQ y* como

$$y^* = \sqrt{(2KD)/h}$$

Tenemos entonces que la política de inventario óptima para el modelo propuesto es

$y^* = \sqrt{(2KD)/h}$ Pedido

Unidades de cada $t^*_0 = y^*/D$ unidades de tiempo

Decimos entonces que un nuevo pedido no necesariamente tiene que recibirse en el instante que se pide. Es ahí cuando ocurre un tiempo de espera (tiempo de anticipación) positivo L, entre la colocación y el recibido de un pedido, como se muestra en la figura 1.

En este caso, tenemos entonces el punto de volver a pedir, o bien "punto de reorden", el cual ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a LD unidades.

La figura 1 asume que el tiempo de espera L es menor que la duración del ciclo "t*0", lo cual por lo general puede no ser el caso. Si así sucediera, definimos el tiempo de espera efectivo como

$$L_e = L - nt^*_0$$

El parámetro n es el valor entero más grande no mayor que

$$L/t^*_0$$

La fórmula reconoce que después de n ciclos el intervalo real entre la colocación y la recepción de dos pedidos sucesivos es $L_e$.

Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el inventario llega a $L_eD$ unidades y la política de inventario puede volverse a formular.

Se pide la cantidad y* siempre que el nivel del inventario se reduzca a $L_eD$ unidades.

Revisemos el siguiente ejemplo usando como fuente Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson adaptado a una realidad cercana

Los tubos fluorescentes en los edificios de la Universidad de Costa Rica se reemplazan a razón de 100 unidades por día. La planta física pide los tubos fluorescentes de forma periódica. Iniciar un pedido de compra cuesta $ 100. Se estima que el costo de un tubo fluorescente almacenado es de aproximadamente $ .02 por día. El tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política de inventario óptima para pedir los tubos fluorescentes.

Con los datos del problema, tenemos

D = 100 unidades por día
K = $ 100 por pedido
h = $ .02 por unidad por día
L= 12 días

Por lo tanto, calculamos para los tubos fluorescentes:

$y^* = \sqrt{2KD / h} = \sqrt{(2x\$100x100)/ .02} = 1000$

La duración del ciclo asociado es

$t^*_0 = y^*/D = 1000/100 = 10$ días

Ya que el tiempo de espera L (= 12 días) excede la duración del ciclo t* ( = 10 días), debemos calcular $L_e$. El número de ciclos enteros incluidos en L es

n = (entero más grande ≤ ($L/t^*_0$) = (entero más grande ≤ 12/10) = 1

Por lo tanto,

$Le = L - nt_0^* = 12 - 1 * 10 = 2$ días

Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a

$L_eD$ = 2 * 100 = 200 tubos fluorescentes

La política de inventario es

Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 200 unidades.

El costo de inventario diario asociado con la política propuesta es

$$CTU = K / (y/D) + h(y/2)$$
$$= \$100 / (1000/100) + \$0.2(1000/2) = \$20 \text{ por día}$$

## 2. CPE-EOQ con reducciones de precios

Este modelo es el mismo que acabamos de ver, excepto que el artículo en un inventario puede adquirirse con un descuento si el tamaño del pedido, y, excede un límite dado, q. Matemáticamente calculamos, el precio de compra unitario c:

$$C = \begin{cases} C_1, \text{ si } y \leq q \\ C_2, \text{ si } y > q \end{cases} \quad c_1 > c_2$$

De manera que el costo de compra por unidad de tiempo es igual a

$$\begin{cases} C_1 y/t_0 = c_1 y/(y/D) = Dc_1, \ y \leq q \\ C_2 y/t_0 = c_2 y/(y/D) = Dc_2, \ y > q \end{cases}$$

Aplicando la notación que acabamos de ver, el costo total por unidad de tiempo es CTU(y) es igual a:

$$\begin{cases} TCU_1(y) = Dc_1, + KD/y + (h/2)y, \ y \leq q \\ TCU_2(y) = Dc_2, + KD/y + (h/2)y, \ y > q \end{cases}$$

Observemos el comportamiento en la siguiente gráfica.

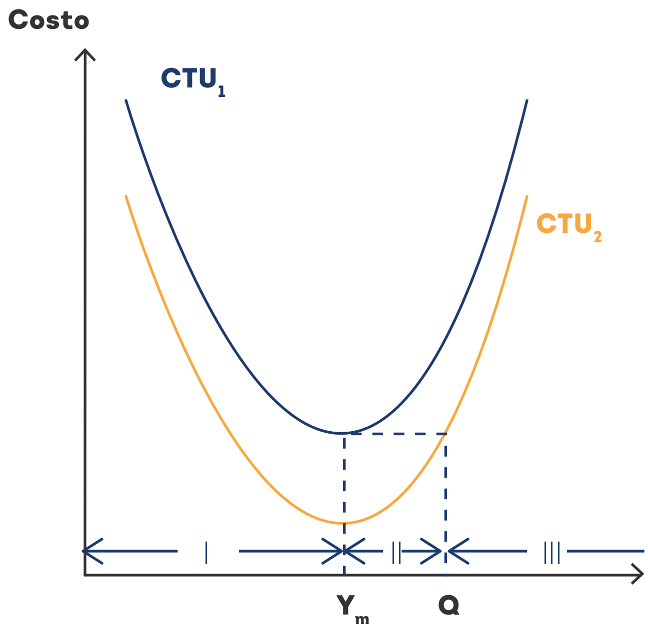



Figura 2. Función de costo de inventario con reducciones de precio.

Las funciones $CTU_1$ y $CTU_2$ se grafican en la figura anterior. Debido a que las dos funciones difieren solo por una constante, sus mínimos deben coincidir en

$y_m = \sqrt{(2KD)/h}$

La determinación de la cantidad óptima de pedido y* depende de dónde queda el punto de reducción de precios, q, con respecto a las zonas I, II y III, que revisaremos más adelante delineadas gráficamente por los intervalos $(0, y_m)$, $(y_m, Q)$ y $(Q, \infty)$, respectivamente.

El valor de $Q(>y_m)$ se determina a partir de la ecuación:

$2(Q) = TCU_1 (y_m)$

$c_2D + KD/Q + hQ/2 = TCU_1 (y_m)$

Lo cual se simplifica en

$Q^2 + ((2(c_2D-TC_1(y_m))/h)Q + (2KD)/h = 0$

La cantidad óptima deseada y* la podemos ver cuando delimitemos las zonas más adelante en esta lectura.

y* = ym,
si q se encuentra en las zonas I o III

y* = q,
si q se encuentra en las zonas II

Los pasos para determinar y* son

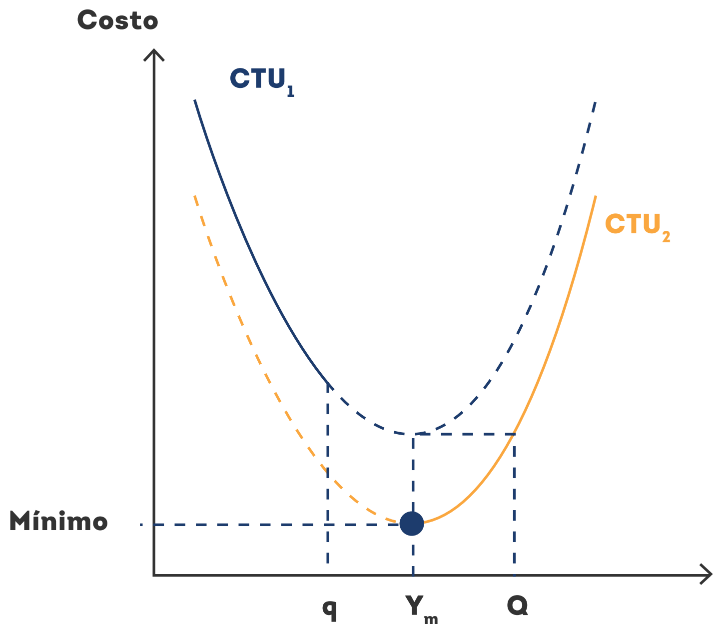
**Paso 1.** Determine ym $= \sqrt{(2KD)/h}$ Si q está en la zona I, entonces $y^* = y_m$. De lo contrario, vaya al paso 2.

**Paso 2.** Determine $Q(>y_m)$ a partir de la ecuación Q.

$Q^2 + ((2(c_2D-TCU_1(y_m))/h)Q + (2KD)/h = 0$

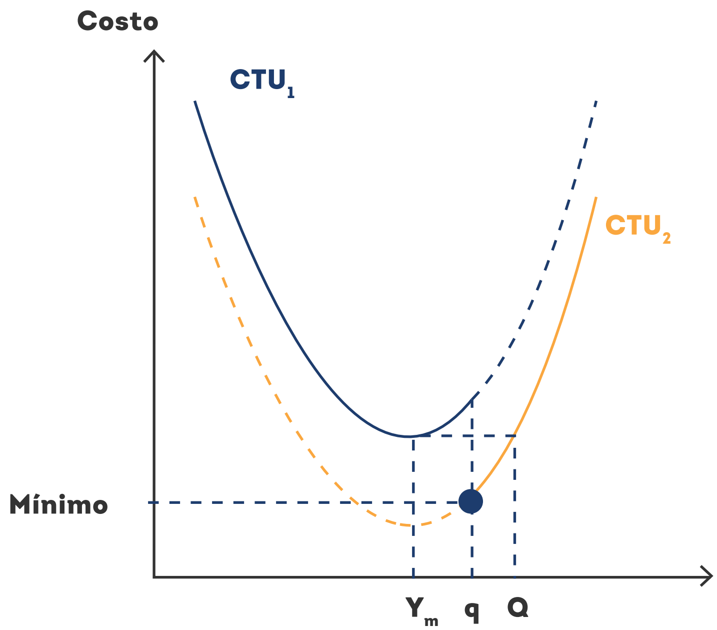
## DELIMITACIÓN DE LAS ZONAS

q queda dentro de la zona I, $y^* = y_m$



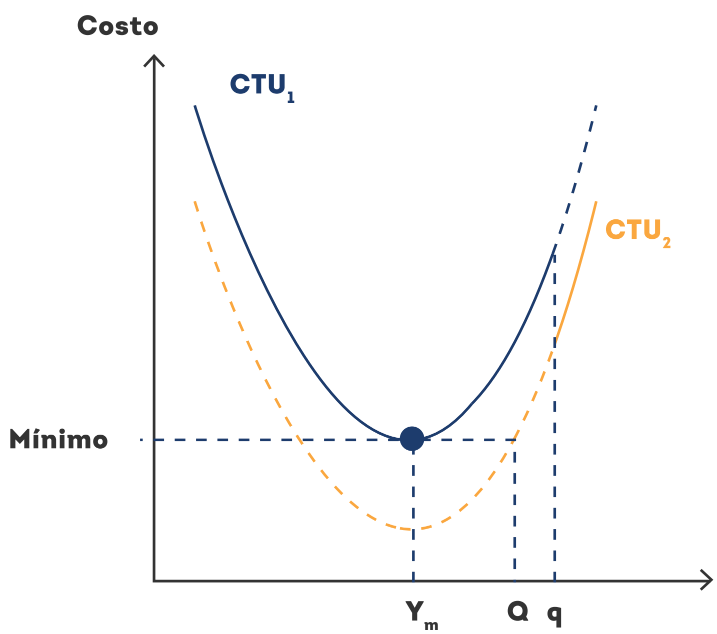

Fuente: Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson. Adaptado a una realidad cercana.

q queda dentro de la zona II, $y^* = q$




Fuente: Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson. Adaptado a una realidad cercana.

q queda dentro de la zona III, $y^* = y_m$




Fuente: Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson. Adaptada a una realidad cercana.

## MODELOS DINÁMICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICA (EOQ)

Aspectos importantes de este modelo

1. El nivel del inventario se revisa periódicamente a lo largo de un número finito de periodos iguales.

2. La demanda por periodo es determinística dinámica, ya que varía de un periodo al siguiente.

Una situación en la cual ocurre la demanda determinística dinámica es la planeación de requerimiento de materiales PRM, MRP, como se conoce por sus siglas en inglés.

**LA DEMANDA POR PERIODO ES DETERMINÍSTICA DINÁMICA, YA QUE VARÍA DE UN PERIODO AL SIGUIENTE.**

Describiremos la PRM-MRP con un ejemplo.

Vamos a suponer que:

Las demandas trimestrales proyectadas durante el año siguiente para dos modelos finales de un producto especificado,

M1 = 100 unidades y

M2 = 150 unidades.

- Al final de cada trimestre se entregan los lotes trimestrales.

- El tiempo de espera de producción es

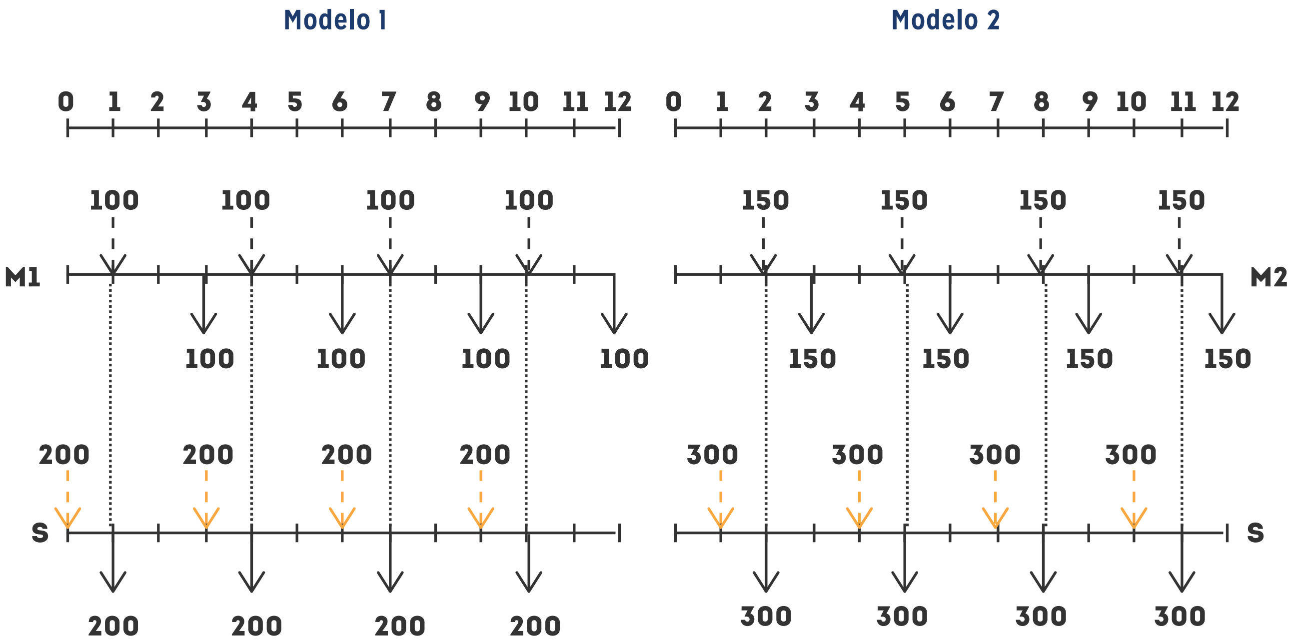
MI = 2 meses

M2 = 1 mes

- Respectivamente cada unidad de M1 y M2 utiliza 2 unidades de un subensamble S.

- El tiempo de espera para la producción de S es de un mes.

Observemos en la siguiente figura como se muestran los programas de producción para los modelos mencionados.




Las flechas sólidas indican el inicio de la demanda trimestral ocurridas al final de los meses 3, 6, 9 y 12.

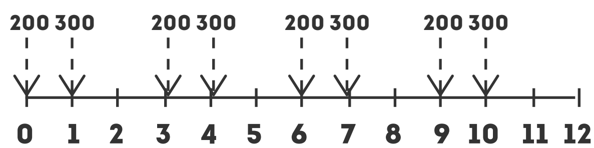
Dados los tiempos de espera para M1 y M2, las flechas de rayas muestran los inicios planeados de cada lote de producción

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamble S debe coincidir con la ocurrencia de las flechas de rayas, donde la demanda S resultante es de 2 unidades por unidad de M1 y M2.

Utilizando un tiempo de espera de un mes, las flechas de rayas dan los programas de producción de S.

Fuente: Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Requerimientos combinados de S
para los modelos 1 y 2.




La demanda combinada de S correspondiente a M1 y M2.

La demanda variable pero conocida resultante de S es típica de la situación, donde aplica la CPE-EOQ dinámica.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Politécnico Grancolombiano. Representación gráfica de un proyecto [Repositorio Digital]. Bogotá, Colombia: Library Red Ilumno. [fecha de publicación: 12 febrero 2014]. [fecha de consulta: 22 julio 2014]. Base de datos disponible en Library Red Ilumno.

Calculo del tiempo de ejecución de un proyecto. [Repositorio Digital]. Bogotá, Colombia: Library Red Ilumno. [fecha de publicación: 12 febrero 2014]. [fecha de consulta: 22 julio 2014]. Base de datos disponible en Library Red Ilumno.

Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson. Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigaci-c3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf. [Consulta 20 de junio 2013].