MODELO DE REDES, ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN

MODELO DE REDES, ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN

Innumerable cantidad de situaciones en Investigación de Operaciones pueden modelarse y resolverse como redes. Estas son conocidas como nodos conectados por ramas o arcos.

Revisemos algunos conceptos básicos sobre este tema de redes.

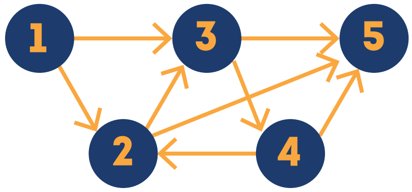
Taha (2014) nos explica que:

> Una red se compone de un conjunto de nodos unidos por arcos (o ramas). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos, y A es el conjunto de arcos.

UNA RED SE COMPONE DE UN CONJUNTO DE NODOS UNIDOS POR ARCOS (O RAMAS).

> Con cada red hay un flujo. El flujo máximo en una red puede ser finito o infinito, según la capacidad de sus arcos.
>
> Un arco está dirigido u orientado si permite el flujo positivo solo en una dirección. Una red dirigida tiene todos los arcos dirigidos.
>
> Una ruta es un conjunto de arcos que unen dos nodos distintos, y que pasan a través de otros nodos en la red.
>
> Una ruta forma un ciclo o un bucle si conecta un nodo de vuelta a sí mismo a través de otros nodos.
>
> Se dice que una red está conectada si cada dos nodos distintos están conectados en al menos una ruta (pág. 210. El resaltado es nuestro).

Ahora, observemos la siguiente figura:

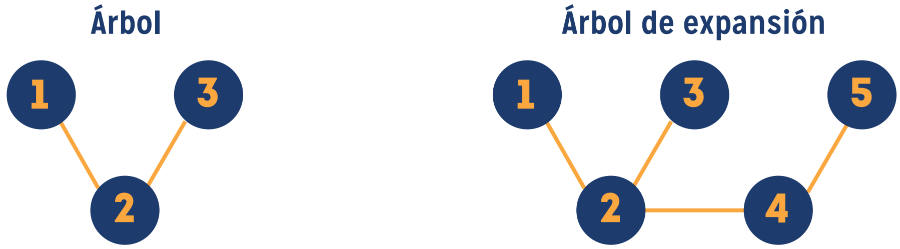


Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

De acuerdo con Taha (2012):

> N = {1, 2, 3, 4, 5}
>
> A = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)}
>
> Los arcos (1,2), (2,3), (3,4) y (4,5) forman una ruta entre los nodos 1 y 5.
>
> Los arcos (2,3), (3,4) y (4,2) forman un ciclo.
>
> Es un tipo de red conectada.
>
> Un árbol es una red conectada libre de ciclos compuesta de un subconjunto de todos los nodos, y un árbol de expansión es un árbol que une todos los nodos de la red (pág 210).

En la siguiente figura, podemos ver ejemplos de un árbol y un árbol de expansión de la red.



Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

A continuación estudiaremos cuatro algoritmos de optimización para modelar cuatro situaciones, divididos en dos partes:

Parte 1

1. Situación 1: árbol de mínima expansión

2. Situación 2: algoritmo de la ruta más corta

Parte 2

3. Situación 3: algoritmo de flujo máximo

4. Situación 4: algoritmo de la ruta crítica (CPM)

PARTE 1

1. Situación 1: árbol de mínima expansión

Este árbol relaciona los nodos de una red valiéndose de la longitud mínima total de los arcos de conexión.

Taha (2012) explica que:

Supongamos N = {1, 2,...,n} es el conjunto de nodos de la red.

C_k = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en una iteración k.

C_k = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración k (pág. 212).

Taha (2012) también nos describe a través de unos pasos el algoritmo del árbol de mínima expansión:

Paso 0. Establezca $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C}_0 = N$

Paso 1. Inicie con cualquier nodo 1 en el conjunto no conectado $\overline{C}_0$ y establezca $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Establezca k=2.

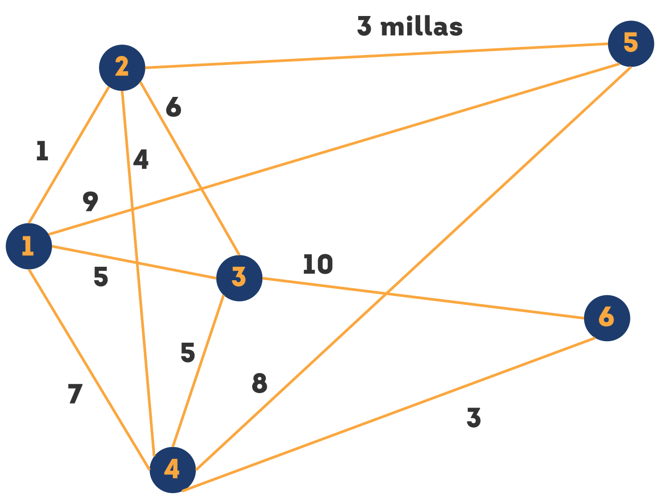
Paso general k. Seleccione un nodo, j*, en el conjunto no conectado $\overline{C}_{k-1}$, que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto C_{k-1} conectado. Vincule j* permanentemente a C_{k-1} y elimínelo de $\overline{C}_{k-1}$ para obtener C_k y $\overline{C}_k$, respectivamente. Deténgase si $\overline{C}_k$ está vacío; de lo contrario, establezca k=k + 1 y repita el paso.

(Taha, 2012, pág. 212).

Revisemos el siguiente ejemplo

Una empresa de telefonía celular va a proporcionar un servicio nuevo en seis desarrollos habitacionales. Para ello, invertirá en la construcción de antenas de comunicación celular. Los números de cada arco representan los posibles costos de la inversión en millones de colones.

El objetivo es determinar la red de antenas mínimas de la inversión más económica.



Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Revisemos las iteraciones de la siguiente figura:

El algoritmo se inicia en la ciudad 1, dando por resultado

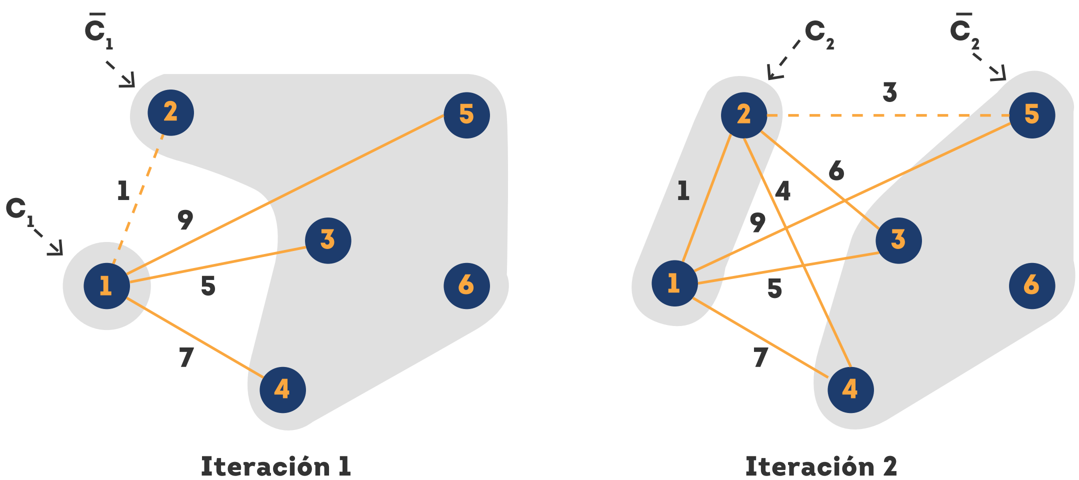
$C1 = \{1\}$ y $\overline{C1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

De acuerdo con Taha (2012):

I. Los arcos delgados proporcionan todos los candidatos entre $\overline{C}$ y C.

II. Los arcos gruesos son los vínculos permanentes del conjunto conectado C,

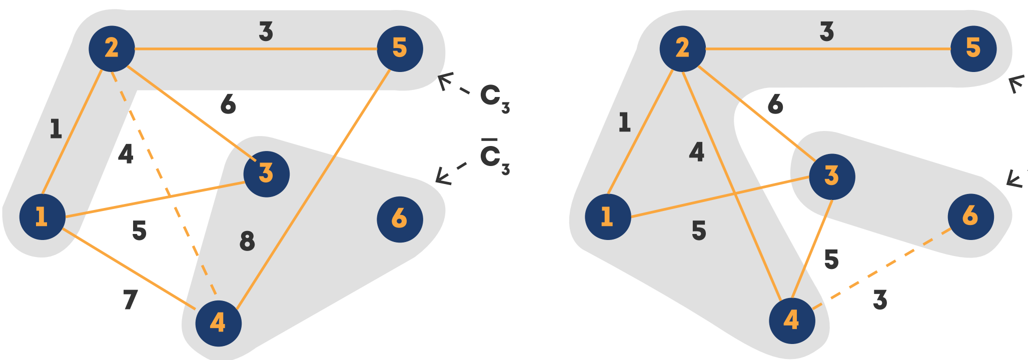
III. y el arco de rayas es el nuevo vínculo (permanente) agregado en cada iteración. (pág. 213).



Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

En la iteración 1, de la figura anterior el arco (1, 2) es el vínculo más corto (= 1 millón de colones) entre todos los arcos candidatos de la ciudad 1 a las ciudades 2, 3, 4, 5 y 6 en el conjunto no conectado $\bar{C}_1$. De ahí que el vínculo (1, 2) se hace permanente y j* = 2, de lo cual resulta:

$C_2 = \{1, 2\}, \bar{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

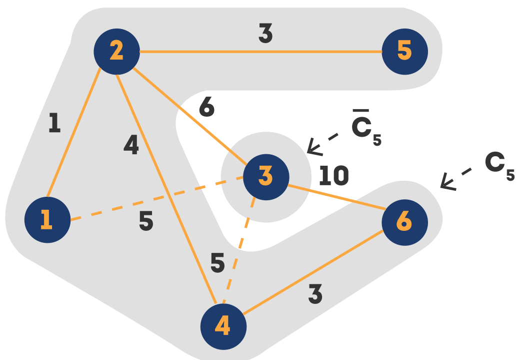


Iteración 3 Iteración 4

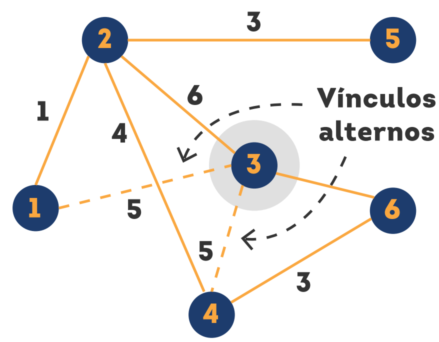
Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

$C_3 = \{1, 2, 5\}, \overline{C}_3 = \{3, 4, 6\}$

$C_4 = \{1, 2, 4, 5\}, \overline{C}_4 = \{3, 6\}$



Iteración 5



Iteración 6
(Árbol de mínima expansión)

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

$C_5 = \{1, 2, 4, 5, 6\}, \overline{C}_5 = \{3\}$

La iteración 6 muestra la solución.

La inversión mínima resultante en la construcción de antenas de comunicación para el servicio del nuevo celular deseado es 1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16 millones de colones.

2. SITUACIÓN 2: PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

El algoritmo de la ruta más corta permite establecer la ruta más corta entre un origen y un destino.

Existen varios tipos de algoritmos: el algoritmo Dijkstra, que resuelve redes cíclicas y el Floyd, para resolver redes acíclicas. Este último determina la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red y lo pueden estudiar en el libro de Hamdy Taha (2012), Investigación de operaciones.

EL ALGORITMO DE LA RUTA MÁS CORTA PERMITE ESTABLECER LA RUTA MÁS CORTA ENTRE UN ORIGEN Y UN DESTINO.

Para nuestro caso de estudio, estaremos analizando el algoritmo de Dijkstra de la ruta más corta, que se usa para determinar las rutas más cortas entre el nodo origen y los demás nodos en la red. Para ello, hemos adaptado a una realidad más cercana los ejemplos de Taha (2012).

Para mayor comprensión del algoritmo, definiremos las siguientes variables:
d=distancia, l=longitud

Mientras que el algoritmo de Dijkstra, adaptado a una realidad más cercana, sería:

d_i= distancia más corta del nodo origen 1 al nodo i,

l_{ij}= longitud del arco (i,j), l_{ij} (≥ 0).

El algoritmo identifica la etiqueta para un nodo j conectado posteriormente de esta manera:

$[d_j, i] = [d_i + l_{ij}, i], l_{ij} \geq 0$

La etiqueta para el nodo de inicio se define como [0, 2], ya que nos indica que el nodo no tiene predecesor.

Las etiquetas de este algoritmo son de dos tipos:

Temporales: es cuando puede hallarse una ruta más corta al nodo.

Permanentes: cuando no puede hallarse una ruta más corta al nodo.

Pasos del algoritmo adaptado a una realidad cercana

De acuerdo con Taha (2012):

Paso 0. Etiquete el nodo de origen (nodo 1) con la etiqueta permanente [0, i].

Establezca i = 1.

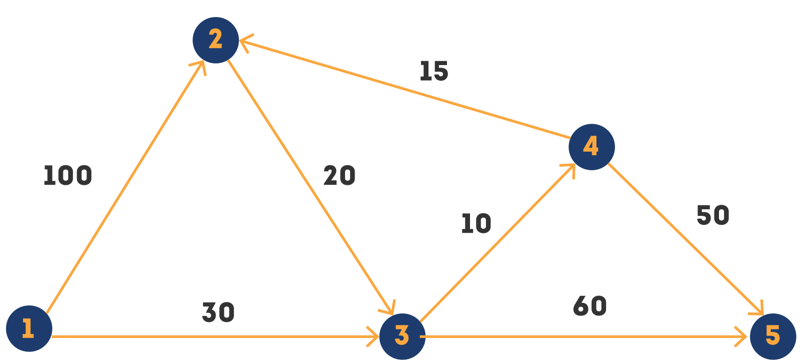
Paso general i

(a) Calcule las etiquetas temporales [$d_i + l_{ij}$, i] para cada nodo j con $l_{ij} > 0$, siempre que j no esté etiquetado permanentemente. Si el nodo j ya tiene una etiqueta temporal existente [d_j, k] hasta otro nodo k y si $d_i + l_{ij} < d_j$, reemplace [d_j, k] con [$d_i + l_{ij}$, i].

(b) Si todos los nodos tienen etiquetas permanentes, deténgase. De lo contrario, seleccione la etiqueta [dx, s] que tenga la distancia más corta (= d_x) entre todas las etiquetas temporales (rompa los empates árbitramente). Establezca i = x y repita el paso i (págs. 221-222).

Ahora, revisaremos el siguiente ejemplo de red para el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

La siguiente figura muestra una red de conexión entre 5 líneas de conexión de ferrocarriles a 5 ciudades, donde se muestran las rutas permisibles y sus longitudes en kilómetros entre la ciudad 1 (nodo 1) y las otras cuatro ciudades (nodos 2 a 5).



Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Necesitamos determinar las rutas más cortas entre la ciudad 1 y cada una de las cuatro ciudades restantes.

A continuación, mostramos las iteraciones para el desarrollo de este ejemplo, según lo explicado por Taha (2012).

Iteración 0. Asignamos una etiqueta permanente [0, -] al nodo 1.

Iteración 1. Se puede llegar a la ciudad 2 y 3 (nodos 2 y 3) desde la ciudad 1 (nodo 1) (el último etiquetado permanentemente).

En seguida, presentamos los nodos etiquetados (temporales y permanentes):

NODO	ETIQUETA	ESTADO
1	[0,-]	Permanente
2	[0 + 100,1] = [100,1]	Temporal
3	[0 + 30,1] = [30,1]	Temporal

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

De acuerdo con Taha (2012):

> Para las dos etiquetas temporales [100,1] y [30,1], el nodo (ciudad) 3 da la distancia mínima (d_3 = 30).

Así que el estado del nodo 3 (ciudad 3) cambia a permanente.

Iteración 2. Se puede llegar a la ciudad 4 y 5 (nodos 4 y 5) desde la ciudad 3 (nodo 3), presentamos los nodos etiquetados. (pág. 222).

NODO	ETIQUETA	ESTADO
1	[0,-]	Permanente
2	[100,1]	Temporal
3	**[30,1]**	**Permanente**
4	[30 + 10,3] = [40,3]	Temporal
5	[30 + 60,3] = [90,3]	Temporal

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

La etiqueta temporal [40,3] en el nodo 4 (ciudad 4) ahora es permanente (d_4 = 40).

De igual manera, Taha (2012) explica la iteración 3.

Iteración 3. Desde la ciudad 4 (nodo 4) se puede llegar a los a la ciudad 2 y 5 (nodos 2 y 5).

Presentamos los nodos etiquetados.

NODO	ETIQUETA	ESTADO
1	[0,-]	Permanente
2	[40 + 15,4] = [55,4]	Temporal
3	[30,1]	Permanente
4	[40,3]	Permanente
5	[90,3] o	
	[40 + 50,4] = [90,4]	Temporal

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

En el nodo 2 (ciudad 2), la nueva etiqueta [55,4] reemplaza a la etiqueta temporal [100,1] de la iteración 1 porque proporciona una ruta más corta. Además, en la iteración 3 el nodo 5 (ciudad 5) tiene dos etiquetas alternativas con la misma distancia (d_5 = 90). La etiqueta temporal [55,4] en el nodo 2 ahora es permanente (d_2 = 55) (pág. 223):

De igual manera, Taha (2012) nos explica la iteración 4.

Iteración 4. Sólo el nodo 3 (ciudad 3) permanentemente etiquetado puede ser alcanzado desde el nodo 2 (ciudad 2). Por consiguiente el nodo 3 (ciudad 3) no puede ser re-etiquetado.

Presentamos los nodos etiquetados.

NODO	ETIQUETA	ESTADO
1	[0,-]	Permanente
2	[40 + 15,4] = [55,4]	Permanente
3	[30,1]	Permanente
4	[40,3]	Permanente
5	[90,3] o	Permanente
	[40 + 50,4] = [90,4]	Permanente

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

El nodo 5 es la única etiqueta temporal. Como el nodo 5 no conduce a otros nodos, su etiqueta se hace permanente, y el proceso termina (pág. 223).

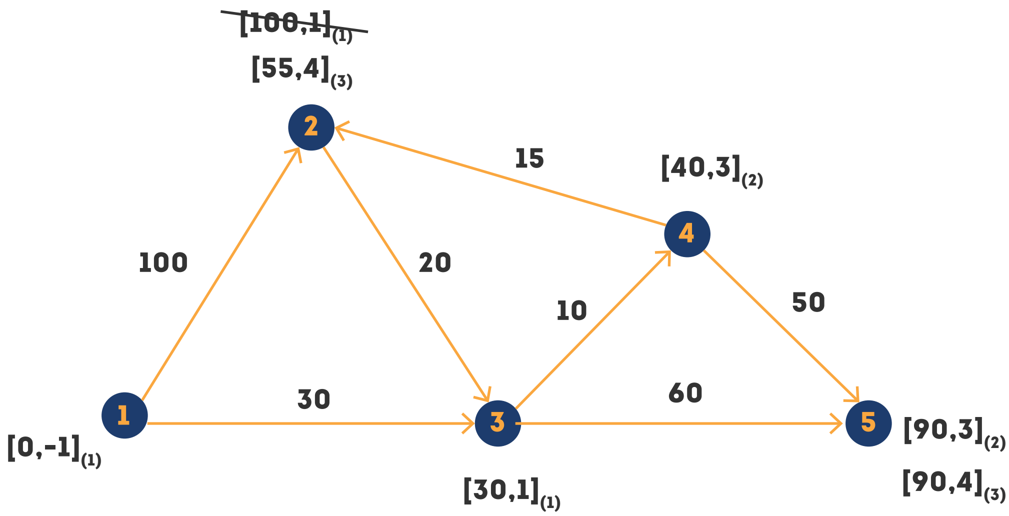
Según Taha (2012):

> La ruta más corta entre la ciudad 1 (nodo 1) y cualquier otra ciudad (nodo) en la red, se determina partiendo de la ciudad (nodo) destino deseada y retrocediendo hasta la ciudad (nodo) de inicio utilizando la información en las etiquetas permanentes. Por ejemplo, la siguiente secuencia determina la ruta más corta de la ciudad 1 (nodo1) a la ciudad 2 (nodo2) (pág. 223).

(2) --> [55, 4] --> (4) --> [40, 3] --> (3) --> [30, 1] --> (1)

Por lo tanto, la ruta deseada 1-->3-->4-->2 con una distancia total de 55 millas.

Según Taha (2012), también estos cálculos es posible hacerlos directamente en la red. Revisemos, con este fin, la siguiente figura.



()= iteración

Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Taha, Hamdy. (2012). *Investigación de operaciones* (novena ed.). México: Pearson. Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigacic3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf. [Consulta 20 de junio, 2013].

ILUMNO