DUALIDAD Y ANÁLISIS POSTÓPTIMO

DUALIDAD Y ANÁLISIS POSTÓPTIMO

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

De acuerdo con Thaja (2012), el problema dual se define sistemáticamente a partir del modelo de PL primal (u original). Los dos problemas están estrechamente relacionados en el sentido de que la solución óptima de uno proporciona automáticamente la solución óptima al otro, es decir, desde una función objetivo de maximización podremos también obtener la función minimizar. (Taha, 2012, pág. 137)

EL PROBLEMA DUAL SE DEFINE SISTEMÁTICAMENTE A PARTIR DEL MODELO DE PL PRIMAL (U ORIGINAL).

- De acuerdo con Taha (2012), "En la mayoría de los tratamientos de PL, el dual se define para varias formas del primal según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones (≤, ≥ o =), y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas)" (Taha, 2012, pág. 137).

- Además, la definición del problema dual requiere expresar el problema primal en la forma de ecuación que ya hemos visto en los módulos anteriores. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

- Asimismo, como indica Taha (2012), este requerimiento es consistente con el formato de la tabla inicial *simplex*. Por eso, cualesquier resultados obtenidos a partir de la solución óptima primal son aplicados directamente al problema dual asociado.

Según Taha (2012), las ideas claves para construir el dual a partir del primal se resumen como sigue:

1. Asigne una variable dual por cada restricción primal.

2. Construya una restricción dual por cada variable primal.

3. Los coeficientes de restricción (columna) y el coeficiente objetivo de la variable primal j-ésima definen respectivamente los lados izquierdos y derechos de la restricción dual j-ésima.

4. Los coeficientes objetivo duales son iguales a los lados derechos de las ecuaciones de restricción primales.

5. Las reglas que aparecen en la tabla 1 rigen el sentido de optimización, la dirección de las desigualdades y los signos de las variables en el dual. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción en el dual (es decir, ≤ o ≥) es que si el objetivo dual es de minimización (es decir, apunta hacia abajo), entonces todas las restricciones serán del tipo ≥ (es decir, apuntan hacia arriba). Lo opuesto aplica cuando el objetivo dual es de maximización.

TABLA 1: Reglas para construir el problema dual

OBJETIVO DEL PROBLEMA PRIMAL[a]	PROBLEMA DUAL		
	OBJETIVO	TIPO DE RESTRICCIÓN	SIGNO DE LAS VARIABLES
Maximización	Minimización	≥	Irrestricta
Minimización	Maximización	≤	Irrestricta

TABLA 1: Reglas para construir el problema dual..

[a]Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo y todas las variables son no negativas. Tabla tomada de Tabla tomada de Taha. H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

TABLA 2: Reglas para construir el problema dual

PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN		PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN
Restricciones	<->	Variables
≥	<->	≤0
≤	<->	≥0
=		Restricciones irrestrictas
Viariables		
≥0	<->	≥
≤0	<->	≤
Irrestrictas	<->	=

TABLA 2: Reglas para construir el problema dual. Tabla tomada de Tabla tomada de Taha. H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson..

En relación con esta tabla, Taha (2012) explica que:

> Observe que los encabezados de columna que aparecen en la tabla no utilizan el nombre primal y dual. Lo que importa en este caso es el sentido de optimización.
>
> Si el primal es de maximización, entonces el dual es de minimización y viceversa. Observe también que no hay medidas específicas para incluir variables artificiales en el primal. La razón es que las variables artificiales no cambiarían la definición del dual (pág. 140):

RELACIONES PRIMAL-DUAL

Veremos varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

SI EL PRIMAL ES DE MAXIMIZACIÓN, ENTONCES EL DUAL ES DE MINIMIZACIÓN Y VICEVERSA.

Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales:

(fila vector) x (matriz)
(matriz) x (columna vector)
(escalar) x (matriz)

Por comodidad, estas operaciones se resumen. En primer lugar, presentamos algunas definiciones de matriz:

- **Una matriz, A, de tamaño (m x n):** es un conjunto rectangular de elementos con m filas y n columnas.

- **Un vector fila, V, de tamaño m:** es una matriz (1 x m).

- **Un vector columna, P, de tamaño n:** es una matriz (n x 1).

Representaciones matemáticas

1. **(Vector fila X matriz, VA).** La operación es válida solo si el tamaño del vector fila V y la cantidad de filas de A son iguales. Por ejemplo:

$$(11,22,33)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1x11+3x22+5x33, 2x11+4x22+6x33)$$

$$=(242,308)$$

2. **(Matriz X vector columna, AP).** La operación es válida solo si la cantidad de columnas de A y el tamaño del vector columna P son iguales. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1x11+3x22+5x33 \\ 2x11+4x22+6x33 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

3. **(Escalar X matriz, ∞A).** Dada la cantidad escalar a (o constante), la operación de multiplicación ∞A da una matriz del mismo tamaño que la matriz A. Por ejemplo, dado que a = 10:

$$(10)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{matrix}$$

Diseño de la tabla *simplex*

La Tabla 3 representa esquemáticamente las tablas *simplex* inicial y generales.

De acuerdo con Taha (2012):

En la tabla inicial, los coeficientes de restricción bajo las variables iniciales forman una matriz identidad. Con esta disposición, las iteraciones siguientes de la tabla *simplex* generadas por las operaciones de filas de Gauss-Jordan modifican los elementos de la matriz identidad para producir lo que se conoce como matriz inversa. La matriz inversa es la clave para calcular todos los elementos de la tabla *simplex* asociada (Pág. 142).

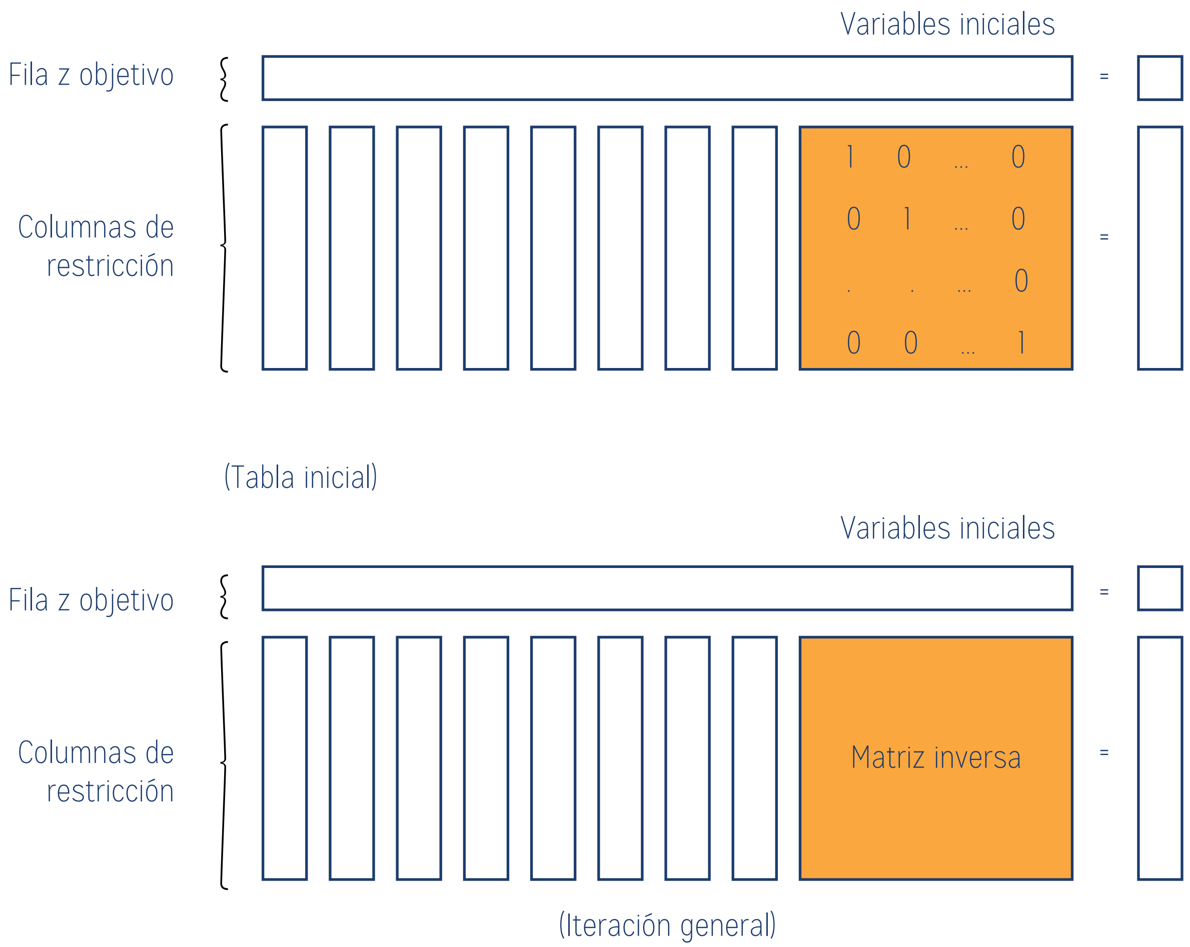

TABLA 3: Representación esquemática de las tablas simplex inicial y general. Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson

SOLUCIÓN DUAL ÓPTIMA

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas. Así pues, de acuerdo con Taha (2012), "en un modelo de PL en el que la cantidad de variables es considerablemente menor que la de restricciones, pueden ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de cálculos *simplex* depende en gran medida (aunque no totalmente) de la cantidad de restricciones" (Taha, 2012, pág.143).

LAS SOLUCIONES PRIMAL Y DUAL ESTÁN ESTRECHAMENTE RELACIONADAS. EN UN MODELO DE PL EN EL QUE LA CANTIDAD DE VARIABLES ES CONSIDERABLEMENTE MENOR QUE LA DE RESTRICCIONES.

Esta sección proporciona dos métodos para determinar los valores duales.

Método 1

$$\text{Valor óptimo de la variable dual } y_i = \left(\begin{array}{c}\text{Coeficiente z primal óptimo de la variable inicial } x_i \\ + \text{ Coeficiente objetivo original } x_i\end{array}\right)$$

Método 2

$$\left(\begin{array}{c}\text{Valores óptimos de las} \\ \text{variables duales}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Vector fila de los coeficientes} \\ \text{objetivo originales de las variables} \\ \text{básicas primales óptimas}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{Inversa primal} \\ \text{óptima}\end{array}\right)$$

Tomado de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

Una vez más, Taha (2012) explica que:

> El problema de PL puede considerarse como un modelo de asignación de recursos que busca maximizar los ingresos con recursos limitados. Considerando el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interesantes interpretaciones económicas del modelo de asignación de recursos.
>
> Para formalizar el planteamiento, considere la siguiente representación de los problemas primal y dual (pág.153).

PRIMAL	DUAL
Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
Sujeto a	Sujeto a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1,2,\ldots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = 1,2,\ldots,n$
$x_j \geq 0, j=1,2\ldots,n$	$y_i \leq 0, i=1,2\ldots,m$

Considerado como un modelo de asignación de recursos, el problema primal consta de n actividades económicas y m recursos. El coeficiente cj en el primal representa el ingreso por unidad de la actividad j. El recurso i con disponibilidad b_i se consume a razón de a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LAS VARIABLES DUALES

Taha (2012) nos explica que:

> Para cualquiera de las dos soluciones factibles primal y dual, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:
>
> $$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$
>
> En el óptimo, los dos valores objetivo son iguales, es decir, z = w.
>
> En función del modelo de asignación de recursos, z representa \$ ingresos, y b_i representa unidades disponibles del recurso i. Por lo tanto,
>
> Dimensionalmente, z = w implica:
>
> $$\$ \text{ ingresos } Z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (\text{unidades del recurso i}) \times (\$ \text{ por unidad del recurso i})$$
>
> Esto quiere decir que la variable dual, y_i, representa el valor por unidad del recurso i.
> El nombre estándar precio dual (o precio sombra) del recurso i reemplaza el nombre (sugestivo) valor por unidad en toda la literatura de programación lineal y en los paquetes de software.
>
> Utilizando el mismo análisis dimensional, podemos interpretar la desigualdad z < w (para cualquiera de las dos soluciones primal y dual) como:
>
> (Ingreso) < (Valor de los recursos)
>
> Esta relación expresa que en tanto el ingreso total de todas las actividades sea menor que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no serán óptimas. La optimalidad se alcanza solo cuando los recursos se han explotado por completo. Esto puede suceder solo cuando la entrada (valor de los recursos) se iguala a la salida (ingreso en dólares) (Pág. 154).

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LAS RESTRICCIONES DUALES

Según Taha (2012):

El significado económico de las restricciones duales puede lograrse utilizando la siguiente fórmula , la cual establece que en cualquier iteración primal,

$$\text{El coeficiente objetivo de } x_j = \left(\begin{array}{c}\text{Lado izquierdo de la}\\ \text{restricción dual j}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Lado derecho de la}\\ \text{restricción dual j}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i = c_j$$

Una vez más utilizamos el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. El ingreso por unidad, c_j, de la actividad j está en dólares por unidad. De ahí que, por consistencia, la cantidad también debe estar en dólares por unidad.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i$$

A continuación, como c representa ingreso, la cantidad con signo opuesto debe representar costo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i$$

Por lo tanto tenemos:

$$\$\text{ costo} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\begin{array}{c}\text{Consumo del recurso i por}\\ \text{unidad de la actividad j}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{Costo por unidad del}\\ \text{recurso i}\end{array}\right)$$

La conclusión es que la variable dual y1 representa lo que se conoce en la literatura de PL como costo imputado por unidad de recurso i, y podemos considerar que la cantidad como el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de la actividad j.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i$$

La cantidad

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i - c_j \text{ (= costo imputado de la actividad } j - c_j\text{)}$$

Se conoce como costo reducido de la actividad j.

La condición de optimalidad de maximización del método *simplex* plantea que un incremento en el nivel de una actividad j no utilizada (no básica) puede mejorar el ingreso solo si su costo reducido es negativo. En función de la interpretación precedente, esta condición establece que:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Costo imputado de recursos consu-}\\ \text{midos por unidad de la actividad } j\end{array}\right) < \left(\begin{array}{c}\text{Ingreso por unidad de la}\\ \text{actividad } j\end{array}\right)$$

De este modo, la condición de optimalidad de maximización dice que es económicamente ventajoso incrementar el nivel de una actividad si su ingreso unitario excede su costo unitario imputado (Págs. 155-156).

ALGORITMOS *SIMPLEX* ADICIONALES PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

Nuevamente, citamos a Taha (2012). Este autor explica que:

UNA CONDICIÓN DE FACTIBILIDAD DIFERENTE, CONOCIDA COMO EL BORDE MÁS INCLINADO, HA MEJORADO TANTO LA EFICIENCIA DE CÁLCULO DEL ALGORITMO *SIMPLEX* DUAL QUE AHORA ES EL ALGORITMO DOMINANTE (BASADO EN *SIMPLEX*) PARA RESOLVER PL EN TODOS LOS CÓDIGOS COMERCIALES.

Algoritmo *simplex* dual que se inicia como no factible (pero mejor que óptimo) y así permanece hasta que se restaura la factiblidad, y el algoritmo *simplex* generalizado, que combina los métodos *simplex* primal y dual, los cuales se inician sin ser ni óptimos ni factibles. En los tres algoritmos se utiliza el análisis postóptimo que se verá más adelante (Pág.158).

Algoritmo *simplex* dual

Taha (2012) comenta que:

El método *simplex* dual se inicia con una solución mejor que óptima y una solución básica no factible. Las condiciones de optimalidad y factibilidad están diseñadas para preservar la optimalidad de las soluciones básicas a medida que la solución se mueve hacia la factibilidad.

Condición dual de factibilidad. La variable de salida, x_r, es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen de forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, el algoritmo se termina.

Condición dual de optimalidad. Dado que x_r es la variable de salida, sea c_j el costo reducido de la variable no básica x_j, y ∞_{rj} el coeficiente de restricción en la fila x_r y en la columna x_j de la tabla. La variable de entrada es la variable no básica con $\infty_{rj} < 0$ que corresponde a:

$$\min \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{\alpha_{rj}} \right| \right\}, \alpha_{rj} < 0$$

(No básica de x_j)

(Los empates se rompen arbitrariamente). Si $\infty_{rj} \geq$ con todas las x_j no básicas, el problema no tiene una solución factible.

Para iniciar la programación lineal óptima y no factible, se debe cumplir con dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método *simplex* regular .

2. Todas las restricciones deben ser del tipo (≤).

Las desigualdades del tipo (≥) se convierten en (≤) al multiplicar ambos lados de la desigualdad por -1. Si la PL incluye restricciones (=), la ecuación se puede reemplazar por dos desigualdades. Por ejemplo, $x_1 + x_2 = 1$, equivale a$x_1+x_2 \leq 1, x_1+x_2 \geq 1$,o$x_1+x_2 \leq 1, -x_1+x_2$#=1. La solución inicial es no factible si al menos uno de los lados derechos de las desigualdades es negativo (Pág. 159).

ALGORITMO *SIMPLEX* GENERALIZADO

De acuerdo con Taha (2012): "El algoritmo *simplex* (primal) se inicia factible pero no óptimo. El *simplex* dual se inicia mejor que óptimo y no factible" (Taha, 2012, pág. 164).

¿Y qué pasa si un modelo de programación lineal se inicia no óptimo y no factible al mismo tiempo?

En este caso, de acuerdo con Taha (2012):

Desde luego, podemos utilizar variables y restricciones artificiales para asegurar una solución inicial. Sin embargo, esto no es obligatorio porque la idea clave de los métodos *simplex* primal y dual es que la solución factible óptima, cuando es finita, siempre ocurre en un punto de esquina (o una solución básica).

EL ALGORITMO *SIMPLEX* (PRIMAL) SE INICIA FACTIBLE PERO NO ÓPTIMO. EL *SIMPLEX* DUAL SE INICIA MEJOR QUE ÓPTIMO Y NO FACTIBLE

Esto indica que puede desarrollarse un nuevo algoritmo *simplex* basado en el uso de uno tras otro de los métodos *simplex* dual y *simplex* primal. Primero utilice el algoritmo dual para deshacerse de la no factibilidad (sin preocuparse de la optimalidad). Una vez restaurada la factibilidad, puede usarse el *simplex* primal para hallar el óptimo. Como alternativa podemos aplicar primero el *simplex* primal para asegurar la optimalidad (sin preocuparnos de la factibilidad) y luego utilizar el *simplex* dual para buscar la factibilidad (Pág. 164).

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

En relación con este tema, Taha (2012) explica el siguiente ejemplo:

Nos ocuparemos de los cambios de los parámetros del modelo y de la determinación de la nueva solución óptima. Considere, por ejemplo, un caso en la industria avícola, donde comúnmente se utiliza un modelo de programación lineal para determinar la mezcla de alimentos óptima por pollo.

El consumo semanal por pollo varía de .26 lb (120 gramos) para un pollo de una semana de edad hasta 2.1 lb (950 gramos) para un pollo de ocho semanas de edad. Además, el costo de los ingredientes en la mezcla puede cambiar periódicamente. Estos cambios requieren un nuevo cálculo periódico de la solución óptima. El análisis postóptimo determina la nueva solución de una manera eficiente.

La siguiente tabla lista esos casos que pueden surgir en el análisis postóptimo y las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que existe una):

CONDICIONES DESPUÉS DE QUE CAMBIAN LOS PARÁMETROS	ACCIÓN RECOMENDADA
La solución actual permanece óptima y factible.	No es necesaria ninguna otra acción.
La solución actual se vuelve no factible.	Use el *simplex* dual para recuperar factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Use el *simplex* primal para recuperar optimalidad.

Tabla tomada de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Cambios que afectan la factibilidad

Sobre este punto en particular, Taha (2012) explica que:

La factibilidad de la solución óptima actual se ve afectada solo si cambia el lado derecho de las restricciones, o se agrega una nueva restricción al modelo. En ambos casos, la no factibilidad ocurre cuando una o más de las variables básicas actuales se vuelven negativas.

Cambios en el lado derecho. Este cambio requiere volver a calcular el lado derecho de la tabla aplicando la fórmula:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Nuevo lado derecho de la}\\ \text{tabla en la iteración i}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Inversa en la}\\ \text{iteración i}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{Nuevo lado derecho de la}\\ \text{tabla en la iteración}\end{array}\right)$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla muestra los valores de las variables básicas (Pág. 166).

REFERENCIAS BIBIOGRAFICAS

Taha, Hamdy. (2012). *Investigación de operaciones* (novena ed.). México: Pearson. Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigaci-c3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf. [Consulta 20 de junio 2013].