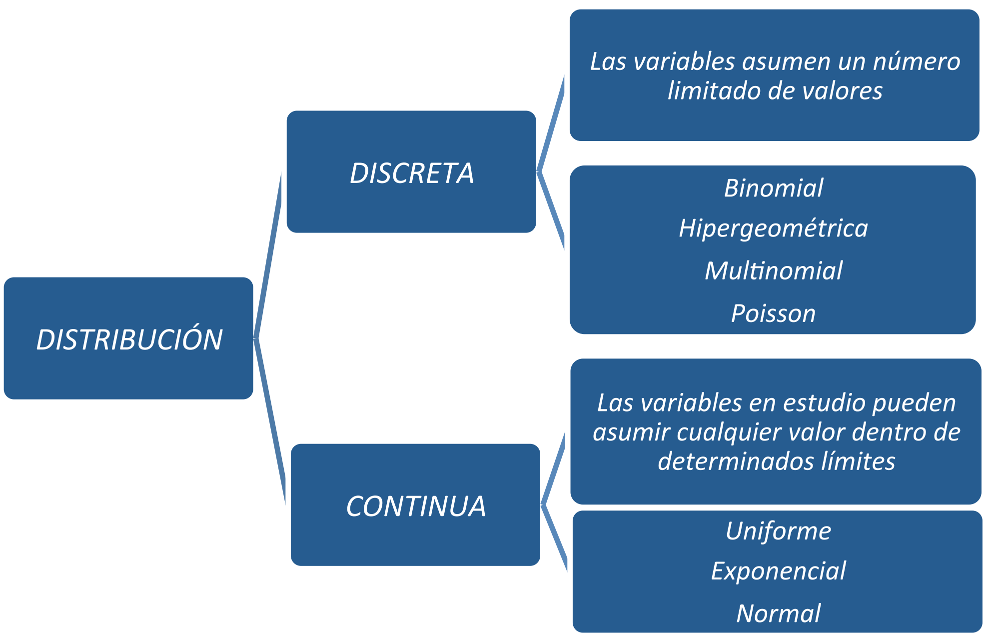
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

Una distribución de probabilidad es una distribución teórica de frecuencias que describe cómo se espera que varíen los resultados de un experimento. Existen diferentes tipos de modelos que permiten describir el comportamiento de fenómenos estadísticos que permiten hacer inferencias y tomar decisiones en condiciones de incertidumbre.

CLASIFICACIÓN:



DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

1. Una relación teórica de resultados y probabilidades que se puede obtener de un modelo matemático y que representa algún fenómeno de interés.
2. Una relación empírica de resultados y sus frecuencias relativas observadas.

3. Una relación subjetiva de resultados relacionados con sus probabilidades subjetivas o artificiales que representan el grado de convicción del encargado en tomar decisiones sobre la probabilidad de posibles resultados.

MEDIA Y LA VARIANZA DE LAS DISTRIBUCIONES DISCRETAS

La media o promedio de una distribución de variables discretas se simboliza con E[X] = μ y se define como

$$E[X] = \sum X_i p_{xi} = \mu$$

Ejemplo

En una rifa organizada a beneficio de una organización de caridad, se venderán 10.000 boletas a $5.000 cada una. El premio es un automóvil que vale $30.000.000. Si usted compra una boleta ¿cuál será su ganancia esperada?

Solución:

Su ganancia X toma dos posibles valores. Una pérdida de $5.000 o una ganancia de $ 29.995.000 con probabilidades de 9999/10000 y 1/10.000 respectivamente. La distribución de probabilidad sería la siguiente:

Xi	Px	XPx
-5000	9999/10000	-49995000/10000
29995000	1/10000	29995000/10000
		-2000

De acuerdo con lo anterior, E[X] = μ = -$2.000, espera tener una perdida de $2.000. Se debe tener en cuenta que el valor esperado es el promedio de la población, es decir, si se realiza la rifa por un número muy grande de veces, se tendría un promedio de pérdidas de -$2.000.

VARIANZA

Si X es una variable aleatoria discreta con media μ, su varianza σ^2 corresponde a:

$\sigma^2 = \sum(x-\mu)^2\rho_x = \sum x^2\rho_x - \mu^2$

Continuando con el ejemplo anterior,

X	0	1	2	Σ
Px	3/10	6/10	1/10	
XPx	0	6/10	2/10	8/10
X^2Px	0	6/10	4/10	10/10

$\sigma^2 = 10/10 – (8/10)^2 = 0,36$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Fue elaborada por Jacobo Bernoulli y es aplicable a un gran número de problemas de carácter económico y tiene sus aplicaciones principales en problemas de Juegos de azar, Control de calidad de un producto, en educación, en las finanzas.

Dentro de sus propiedades, cabe mencionar:

1. El espacio muestral contiene n ensayos idénticos.

2. Las observaciones posibles se pueden obtener mediante dos diferentes métodos de muestreo. Se puede considerar que cada observación se ha seleccionado de una población infinita sin reposición o de una población finita con reposición.
3. Cada observación se puede clasificar en una de dos categorías conocidas como éxito E o fracaso E', las cuales son mutuamente excluyentes es decir $E \cap E' = 0$.
4. Las probabilidades de éxito p y de fracaso $q = 1 - p$ en un ensayo se mantienen constantes, durante los n ensayos.
5. El resultado de cualquier observación es independiente del resultado de cualquier otra observación.

La probabilidad de que el evento E ocurra x veces y el evento E' ocurra (n - x) veces en n ensayos independientes está dado por la fórmula binomial:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

LA MEDIA Y LA VARIANZA DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

$\mu = np$

$\sigma^2 = npq$

<u>Ejemplo:</u>

El 20 % de los vuelos nacionales presentan atrasos en sus itinerarios, si se selecciona 3 vuelos nacionales al azar ¿cuál es la probabilidad que ninguno de los tres presente retrasos?

En este caso se puede identificar el experimento como seleccionar un vuelo nacional al azar. Este experimento produce solo dos resultados: el vuelo presenta retrasos o no presenta retrasos. La probabilidad que presente retrasos es de 0.2 y, por tanto, que no represente retrasos de 0.8. El experimento se repite por tres veces en forma independiente ya que se seleccionan tres vuelos y es de suponer que el resultado de cada uno de los vuelos no tiene que ver con los demás. Sea X la variable que cuenta el número de vuelos seleccionados que llegan con retrasos, entonces X sigue una distribución binomial con parámetros n=3 y p= 0.2 X~b (3, 0,2).

P [X=0] es decir que ningún vuelo llegue con retraso es:
$P [X=0] = 0.2^0 * 0.8^3 = 0.512$

De idéntica forma se puede calcular la probabilidad que X tome los valores 1,2 o 3 es decir que sólo uno llegue con retraso, o 2 o 3 lleguen con retraso.
Los resultados serían:

X	0	1	2	3
Px	0,512	0,384	0,096	0,008

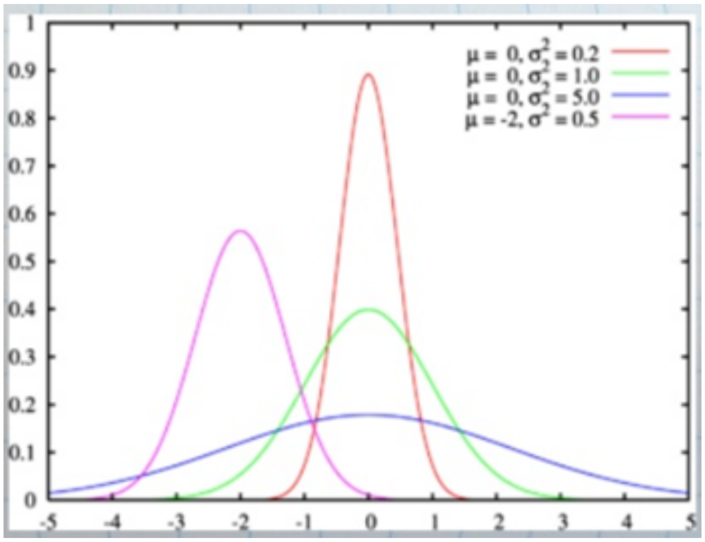
Todos los Px son positivos y suman 1.

Si X tiene una distribución binomial, entonces:
$\mu = np$ y $\delta^2 = np (1-p)$

Con el ejemplo anterior
$\mu = 3x0.2 = 0.6$
$\delta^2 = 3x0.2x0.8 = 0.48$

- *Distribución hipergeométrica* (Presentación tomada del repositorio. Distribución hipergeométrica)
- *Distribución de Poisson.* (Presentación tomada del repositorio. Distribución Poisson)
- *Distribución uniforme.* (Presentación tomada del repositorio. Distribución uniforme)
- *Distribución normal* (Presentación personal)

- *Aproximación normal a la distribución binomial.* (Presentación personal)
- *Comparación entre distribuciones normales*



La forma y posición de una distribución normal están determinadas por su media y su desviación estándar. De acuerdo con la gráfica, se puede concluir que:

- El valor de la media influye en la ubicación del gráfico, a mayor valor de la media μ la campana se desplaza hacia la derecha alejándose de 0 y a menor valor de la media μ se corre hacia la izquierda, acercándose al origen.
- La desviación típica y la varianza influyen en la forma de la campana, a menor dispersión la curva se empina y sus valores están más concentrados alrededor de la media y a mayor dispersión la curva se aplana y tiende hacia los costados. Tomado de http://www.slideshare.net/grafernandez/la-distribucion-normal-presentation

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON LA DESVIACIÓN NORMAL.

Para calcular probabilidades con variables que siguen la distribución normal se usan tablas. Pero, puesto que sería imposible tener una tabla para cada posible distribución normal, solamente la tenemos para la distribución normal estándar, es decir, para la N(0,1).

Necesitaremos, pues, ser capaces de transformar las variables X "normales" N(μ,σ) que encontremos, en variables Z que sigan una distribución normal estándar N(0,1). Este proceso de llevar cualquier distribución normal a una N(0,1) se llama "tipificación de la variable".

Para tipificar X (o sea, transformarla en Z), el primer paso es "centrar" la variable; es decir, hacer que la media μ sea 0.

El siguiente paso es conseguir que la desviación típica σ sea 1.

Por tanto para tipificar una variable lo que hemos de hacer es restar la media y dividir por la desviación típica.

Ejemplo 1: X →N(8 , 1.5). Calcula P[X < 6]

$$P[X<6]=P\left[\frac{X-8}{1.5}<\frac{6-8}{1.5}\right]=P\left[Z<\frac{-2}{1.5}\right]=P[Z<-1.33]$$

y para terminar y calcular la probabilidad, aplicamos lo que viene a continuación. Con esto lo que hemos hecho es simplemente tipificar la variable transformando la probabilidad pedida en una relacionada con la normal N (0 , 1).

Tomado de http://www.ieszaframagon.com/matematicas/estadistica/var_aleatoria/tema5_5.html

CÁLCULO DE UN VALOR X A PARTIR DE UNA PROBABILIDAD CONOCIDA

Se tiene un área y se puede utilizar la tabla de valores para encontrar el valor z que corresponde. Se puede utilizar el valor más próximo. Luego se despeja x a partir de la fórmula que utilizamos para encontrar el valor z:

$X = \sigma z + \mu$

Aquí es importante respetar el signo del valor z para obtener el intervalo correcto.

Ejemplo:

El gobierno plantea un programa de bienestar social para otorgar un subsidio al 15% de las familias con menores ingresos. El ingreso promedio es de 13,500 pesos con una desviación estándar de $4,500. ¿Hasta qué nivel de ingreso se debe otorgar el subsidio si asumimos que los ingresos están normalmente distribuidos?

Tenemos $P(X \leq x) = 15\%$

Como la tabla nos da valores respecto a la media, calculamos esa área. Buscamos en la tabla el valor z para un área de 0.3500 (o la más cercana). Y sustituimos en el despeje de la fórmula con la que se calcula el valor $X = 4500 * (-1{,}04) + 13500 = 8820$

A los que ganan menos de 8,820 pesos.

(Tomado de http://www.scribd.com/doc/52351629/Apuntes-Distribucion-normal)

BIBLIOGRAFÍA:

http://psso.epic-sam.net/Learn/Player.aspx?enrollmentid=3600475 Presentación del repositorio

http://www.scribd.com/doc/52351629/Apuntes-Distribucion-normal

http://www.slideshare.net/grafernandez/la-distribucion-normal-presentation

http://www.ieszaframagon.com/matematicas/estadistica/var_aleatoria/tema5_5.html

Gómez, M. (2011). *Elementos de Estadística Descriptiva*. (24ª Reimpresión). Costa Rica: UNED.

Triola, M.(2007). *Estadística para las ciencias sociales.* (1 Edición). México. Pearson. UNED