# CÁLCULO EN UNA VARIABLE – LÍMITES-CONTINUIDAD

# CONCEPTO DE LÍMITE:

## CONCEPTO DE LÍMITE

El concepto de límite en Matemáticas tiene el sentido de "lugar" hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito.

## DEFINICIÓN DE LÍMITE:

Dada una función f(x) y un punto x = c, se dice que el límite de f(x) cuando x se acerca a **c** es L, y se expresa como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

**cuando:** Dado $\varepsilon$ **> 0**, existe **δ > 0** tal que siempre que **|x−a| < δ,** entonces

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

Considere la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, con x ≠ 1, se puede utilizar una tabla para determinar hacia dónde tiende el límite cuando x = 1:

x se acerca por la izquierda a 1 → ← x se acerca por la derecha a 1

| x | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | ¿? | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 |

f(x) tiende a 2 → ← f(x) tiende a 2

A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede aproximar a ese valor cuanto se desee mediante la tabla anterior, y los valores que se optienen por la derecha y por la izquierda en f(x) se aproximan cada vez más a 2, por lo que se puede decir que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 2, y se denota mediante la siguiente forma:

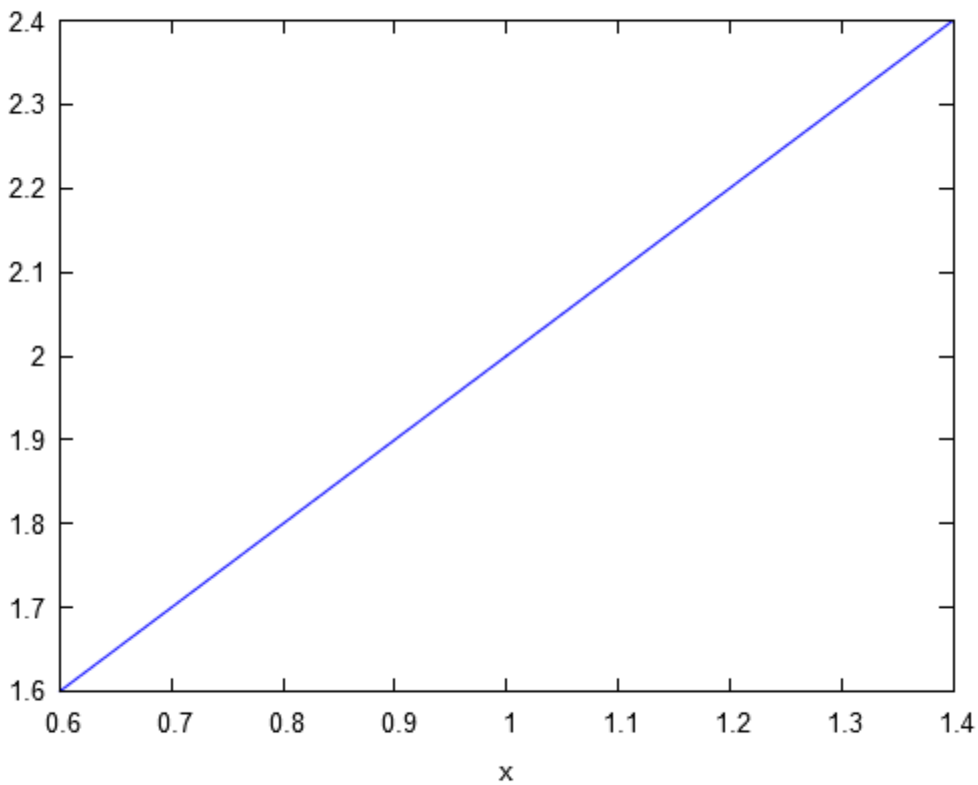
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Si el lector sustituye el valor al que tiende x directamente en el límite, podrá verificar que se indefine f(x), sin embargo, es posible, en este caso y otros semejantes a este, factorizar el numerador, en esta ocasión factoriza el numerador mediante diferencia de cuadrados, permitiendo cancelar un factor del numerador con el denominador, luego de la simplificación, se puede evaluar el valor al que tiende x directamente sin que se indefina la expresión:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

El límite anterior se puede representar en el siguiente gráfico:



**DEFINICIÓN:**

Se define el límite lateral por la derecha de **c** de la función f(x), y se expresa como:

$$\lim_{x \to c^{+}} f(x) = L$$

al límite al que se acerca f(x) cuando x se acerca a **c** y toma valores mayores que **c** . De igual modo, el límite lateral por la izquierda de **c** de la función f(x) se expresa como:

$$\lim_{x \to c^{-}} f(x) = L$$

y se define como el límite al que se acerca f(x) cuando x se acerca a **c** y toma valores menores que **c**.

El uso de los límites laterales es muy útil cuando se tienen funciones tales como: función por partes, radicales, o fraccionarias, además se utilizan para analizar si una función es continua o no como se verá más adelante. A continuación, se presenta un ejemplo de límites laterales.

Determine los límites laterales de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ cuando x tiende a 2.

Para realizar lo que se solicita, se debe calcular por un lado primero y luego el otro, se dará inicio por la derecha, por lo que se denota de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 2^{+}} \sqrt{x-2}$$

para calcular un límite, puede inicialmente evaluarse el valor al que tiende x en el límite, si no se indefine, el valor obtenido es el límite buscado, si se indefine, se deberá realizar trabajo algebraico para hallar el límite, si existe. En este caso se puede evaluar el 2 directamente de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 2^{+}} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$$

por lo tanto, el límite buscado es cero.

De modo similar se realiza por la izquierda, que se denota de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 2^{-}} \sqrt{x-2} = 0$$

Cuando una función presenta el mismo valor del límite por la derecha y por la izquierda, como el ejemplo anterior, se dice el límite de la función existe, como lo dice la siguiente propiedad.

**PROPIEDAD:**

Para que una función f(x) tenga límite en x = c es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan, es decir:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

## PROPIEDADES Y TEOREMAS DE LÍMITES

**SUMA O DIFERENCIA:** $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

**PRODUCTO:** $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

**COCIENTE:** $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, si\_ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

**POTENCIA:** $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} [f(x)]\right]^n$

**MÚLTIPLO ESCALAR:** $\lim_{x \to a} [b \cdot f(x)] = b \cdot \lim_{x \to a} [f(x)]$

Para los fines del presente curso, se omiten las demostraciones de las propiedades, sin embargo, puede consultarlas en los diferentes libros de textos recomendados en la bibliografía de consulta. Seguidamente, se presentan ejemplos donde se aplican las presentes propiedades.

**Ejemplo 1**

Determine $\lim_{x \to 2} 3x^2 - 4x + 1$

Aplicando suma o diferencia de límites, se separa cada monomio del polinomio y se calcula cada límite individualmente:

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - \lim_{x \to 2} 4x + \lim_{x \to 2} 1$$

$$3(2)^2 - 4(2) + 1 = 5$$

**Ejemplo 2**

Determine $\lim_{x \to 3} x^2(x - 2)$

Se aplica la propiedad del producto para separar la multiplicación presente, luego puede aplicarse la propiedad de suma o diferencia en el binomio y se calcula cada límite resultante. En este ejercicio, el lector puede decidir aplicar distributivita y luego suma o diferencia, lo cual también es una posible forma de dar solución al ejercicio.

$$\left[\lim_{x \to 3} x^2\right]\left[\lim_{x \to 3} (x - 2)\right]$$

$$\left[\lim_{x \to 3} x^2\right]\left[\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 2\right]$$

$$(3)^2 (3 - 2) = 9$$

**Ejemplo 3**

Determine $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$

En este caso se empieza por aplicar del cociente, luego suma o diferencia.

$$\frac{\lim_{x \to -1} x^2 - 3x + 4}{\lim_{x \to -1} x - 3}$$

$$\frac{\lim_{x \to -1} x^2 - \lim_{x \to -1} 3x + \lim_{x \to -1} 4}{\lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 3}$$

$$\frac{(-1)^2 - 3(-1) + 4}{(-1) - 3} = -2$$

El lector puede corroborar la aplicación de las propiedades de múltiplo escalar y potencia en los tres ejemplos anteriores.

## DEFINICIÓN. LÍMITES AL INFINITO

**A.** El límite cuando *x* tiende a infinito de *f(x)* es igual a *L* si a medida que hacemos crecer *x* ilimitadamente entonces los valores de *f(x)* se aproximan a *L*. Simbólicamente

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

(Esto se lee: el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a infinito es *L*).

**B.** El límite cuando *x* tiende a menos infinito de *f(x)* es igual a *M* si a medida que hacemos decrecer *x* ilimitadamente entonces los valores de *f(x)* se aproximan a *M*. Simbólicamente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

(Se lee: el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a menos infinito es *M*).

## TEOREMA. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES AL INFINITO

1. Si *k* es una constante entonces $\lim_{x \to \infty} k = k$ y $\lim_{x \to -\infty} k = k$
2. Si *n* es un número natural par entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$
3. Si *n* es un número natural impar entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
4. Si *m* es un número natural par entonces $\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$
5. Si *m* es un número natural impar entonces $\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[m]{x} = -\infty$

Si *k* es un número racional positivo y *r* es un número real arbitrario entonces

$\lim_{x \to \infty} \frac{r}{x^k} = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{r}{x^k} = 0$ siempre que $x^k$ esté definido.

**Ejemplo 4**

Determine el límite de la función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ cuando x tiende infinito.

El límite se denota de la siguiente forma $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2}$. En este caso no se puede sustituir inicialmente un valor determinado puesto que x tiende al infinito, no es un valor propiamente sino un símbolo, por lo que se utilizará una tabla para mostrar al lector hacia donde se dirige el límite.

x se toma valores cada vez mayores

| x | 100 | 1000 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 | 10 000 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.03 | 0.003 | 0.0003 | 0.00003 | 0.000003 | 0.0000003 |

f(x) tiende a 0

Entre mayor es el valor que toma x dirigiéndose hacia infinito, el denominador de la fracción adquiere valores mayores, al dividirse el numerador que es una constante (en este caso 3) por el denominador, el cociente serán números cada vez más pequeños, tendiendo a 0.

Por lo anterior se puede aplicar la siguiente propiedad: *constante entre infinito tiende a cero*, por lo que el

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

## DEFINICIÓN. LÍMITES INFINITOS

Larson y Hostetler (1989) presentan la siguiente definición de límites infinitos:

La afirmación

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

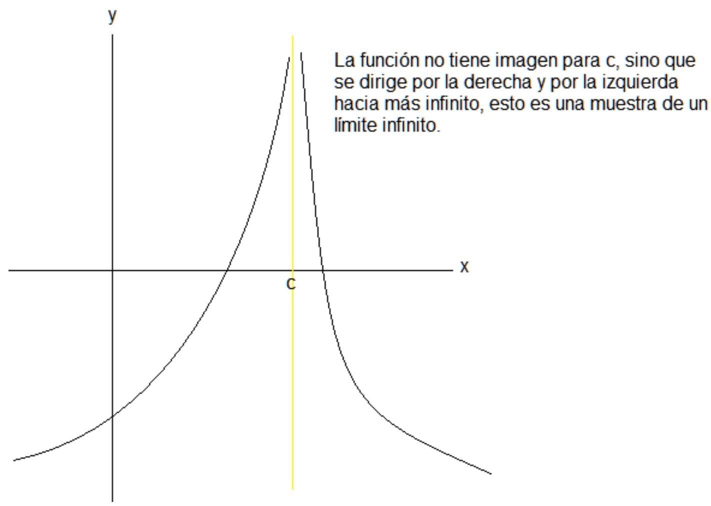
significa que para casa M > 0 existe un δ > 0 tal que f(x) > M siempre que 0 < $|x-c| < \delta$

La afirmación

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para cada N < 0 existe un δ > 0 tal que f(x) < N siempre que 0 < $|x-c| < \delta$

Si f(x)⟶±∞ por la izquierda o por la derecha, se dice que f tiene en x = c una discontinuidad infinita. Gráficamente se puede mostrar de la siguiente forma:




**Ejemplo 5**

Determine el límite de la función cuando x tiende a uno por ambos lados.

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1}$$

En este caso, si se sustituye el valor al que tiende x la función se indefine porque el denominador se hace 0. Observe la siguiente tabla para determinar hacia donde tiende el límite:

x se acerca por la izquierda a 1 ⟶ ⟵ x se acerca por la derecha a 1

| x | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 1 | 1.00001 | 1.0001 | 1.001 | 1.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 100 | 1000 | 10 000 | 100 000 | ¿? | -100 000 | -10 000 | -1000 | -100 |

f(x) tiende a ∞ ⟶ ⟵ f(x) tiende a -∞

**CUANDO UN LÍMITE SE DIRIGE A INFINITO, SE DEBE ANALIZAR POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA PARA DETERMINAR EL SIGNO CORRESPONDIENTE, Y AMBOS PUEDEN SER POSITIVOS O NEGATIVOS, NO SIEMPRE SE PRESENTAN CON SIGNOS DIFERENTES.**

La tabla muestra que entre más pequeño el valor de x a la izquierda de 1, mayor el valor de f(x), por lo que el límite tiende a infinito, en cambio a la derecha el valor de f(x) tiende hacia menor infinito. En este caso, se puede aplicar la siguiente propiedad: *constante entre cero tiende a infinito*, lo que debe determinarse el si es a infinito positivo o negativo, para ello es suficiente tomar un valor muy cercano al que tienda x para determinar el signo del infinito.

Para finalizar el ejercicio se dice que: $\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$.

El lector debe tener presente la diferencia entre *límites al infinito* y *límites infinitos*, el primero, hace referencia al valor al cual tiende x, el segundo, hace referencia al valor al que se dirige el límite.

## TEOREMA. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Larson y Hostetler (1989), presentan las siguientes propiedades de los límites infinitos:

Si *c*, *L* son números reales y *f*, *g* son funciones tales que

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$

entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto: $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \infty, L > 0$

   $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = -\infty, L < 0$
3. Cociente: $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades similares vales si $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

## CALCULO DE LÍMITES

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

2) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+\mathrm{h}}-\sqrt{\mathrm{x}}}{h}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{7-\sqrt{49+9}}{3-\sqrt{9+x}}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{4-\sqrt{16+x}}$

6) $\lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{t}+\mathrm{h})^2-t^2}{h}$

7) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

8) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{25+\mathrm{h}}-5}{h}$

9) $\lim_{x\to 2} \frac{4-\sqrt{5x+6}}{x-2}$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^2-3x}$

12) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

13) $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{\frac{4}{x}-2}$

14) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{4-x^2}$

15) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

16) $\lim_{x\to \frac{-1}{2}} \frac{4x^2-1}{8x^3+1}$

17) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x^2+x-1}{2x^2+4x-1}$

18) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{49+\mathrm{h}}-7}{h}$

19) $\lim_{x\to 2} \frac{4-\sqrt{8x}}{x-2}$

MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

San Marcos

## LÍMITE AL INFINITO

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(-8x + \sqrt{10x^2 + 2x}\right)$

2. $\lim_{x \to +\infty} \left(5x - \sqrt{3x^2 + 2x}\right)$

3. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

4. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{-5x^2 + 2x} + x\right)$

5. $\lim_{x \to +\infty} \left(3x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

6. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} - x\right)$

7. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x^2-1)^3}{(x^2-x+2x^3)^2}\right)$

8. $\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{3x - 4}\right)$

9. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2-7}-4}{\sqrt{x^2+4}-5}\right)$

10. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2-7}-4}{\sqrt{x^2+4}-5}\right)$

11. $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 - \frac{x^4+1}{x^2-1}\right)$

12. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} - \frac{x+1}{x-1}\right)$

13. $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

14. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x^2}\right)$

15. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$

16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{8x^3 - 2x^2 + 8}{2x^3 + 5x - 1} \right)$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 - x^2}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x - 1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}}$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \sqrt{18x^2 + 1} \, \dfrac{1}{\sqrt{32x^2 - 3}} \right)$

# CONCEPTO DE CONTINUIDAD EN UN PUNTO Y EN UN CONJUNTO

## FUNCIONES CONTINUAS Y SUS PROPIEDADES.

La mayor parte de las funciones que manejamos, a nivel elemental, presentan en sus gráficas una propiedad característica que es la continuidad. La continuidad de una función definida en un intervalo significa que pequeñas variaciones en el original **x** ocasionan pequeñas variaciones en la imagen y, no un salto brusco de su valor. Intuitivamente esto significa una variación suave de la función sin saltos bruscos que rompan la gráfica de la misma.

Una función es continua en un punto x = c si existe límite de la función en él y coincide con el valor que toma la función en dicho punto, es decir:

$$\text{f es continua en x si } \lim_{x \to c} f(x) = f(c) = L$$

La continuidad de una función f en el punto x = c implica que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1. Existe el límite de la función f(x) en x = c
2. La función está definida en x = c ; es decir, existe f(c)
3. Los dos valores anteriores coinciden.

**Ejemplo 1**

Determninar si las siguientes funciones son continuas en el intervalo dado.

a. $f(x) = \frac{1}{x}, ]0, 1[$

Observe que el intervalo no incluye al 0, además la función es racional, y su denominador es diferente de cero, por lo que la función es continua en todo el intervalo.

b. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, [0, 2]$

En este caso el intervalo incluye el 2, que hace que el denominador sea igual a 0 por lo que la función se indefine, esto quiere decir que la función es dicontinua en x = 2, y continua en el resto del intervalo.

PARA DETERMINAR DÓNDE UNA FUNCIÓN PUEDE SER DISCONTINUA, ES ÚTIL DETERMINAR EL DOMINIO MÁXIMO DE LA FUNCUIÓN.

**Ejemplo 2**

Analice la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Los polinomios son funciones continuas en todo su dominio, por lo tanto, los polinomios que conforman la función son continuos en $[-1, 3]$. Lo que se requiere es estudiar es qué sucede con el número 2, el cual se incluye en un intervalo, y se excluye en el otro, para ello se debe calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (5 - x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

Como los límites laterales existen y son el mismo, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$, por lo tanto, la función es continua en x = 2 y en todo el intervalo $[-1, 3]$.

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Larson y Hostetler (1989), presentan las siguientes propiedades de las funciones continuas:

Si *b* es un número real y *f, g* continuas en x = c, también son continuas en c las funciones:

1. Múltiplo escalar: *bf*
2. Producto: *fg*
3. Suma y diferencia: *f* ± *g*
4. Cociente: $\frac{f}{g}$, si g(c) ≠ 0

**Ejemplo 3**

Considere la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, analice la continuidad de la función cuando x tiende a 2.

El lector puede evaluar f(2) y verificar que la función es discontinua en x = 2 puesto que el denominador se indefine porque equivale a cero.

Si se factoriza el denominador por diferencia de cuadrados, se obtiene una expresión exquivalente, como se muestra seguidamente:

$$f(2) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

En casos como este se dice que la función es discontinua pero que la discontinuidad es evitable.

## EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Halle las discontinuidades (si las hay) en las siguientes funciones e indique cuáles son evitables.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$
2. $f(x) = \frac{3}{x-5}$
3. $f(x) = \frac{x}{2-x}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$
5. $f(x) = \frac{5}{x^2+2}$
6. $f(x) = \frac{x-1}{3+x^2}$
7. $f(x) = \frac{9}{x}$
8. $f(x) = \frac{x+4}{x^2-16}$
9. $f(x) = \frac{2-x}{4-x^2}$
10. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1, & x \leq 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$
12. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$
13. $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x < 0 \\ x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$