FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

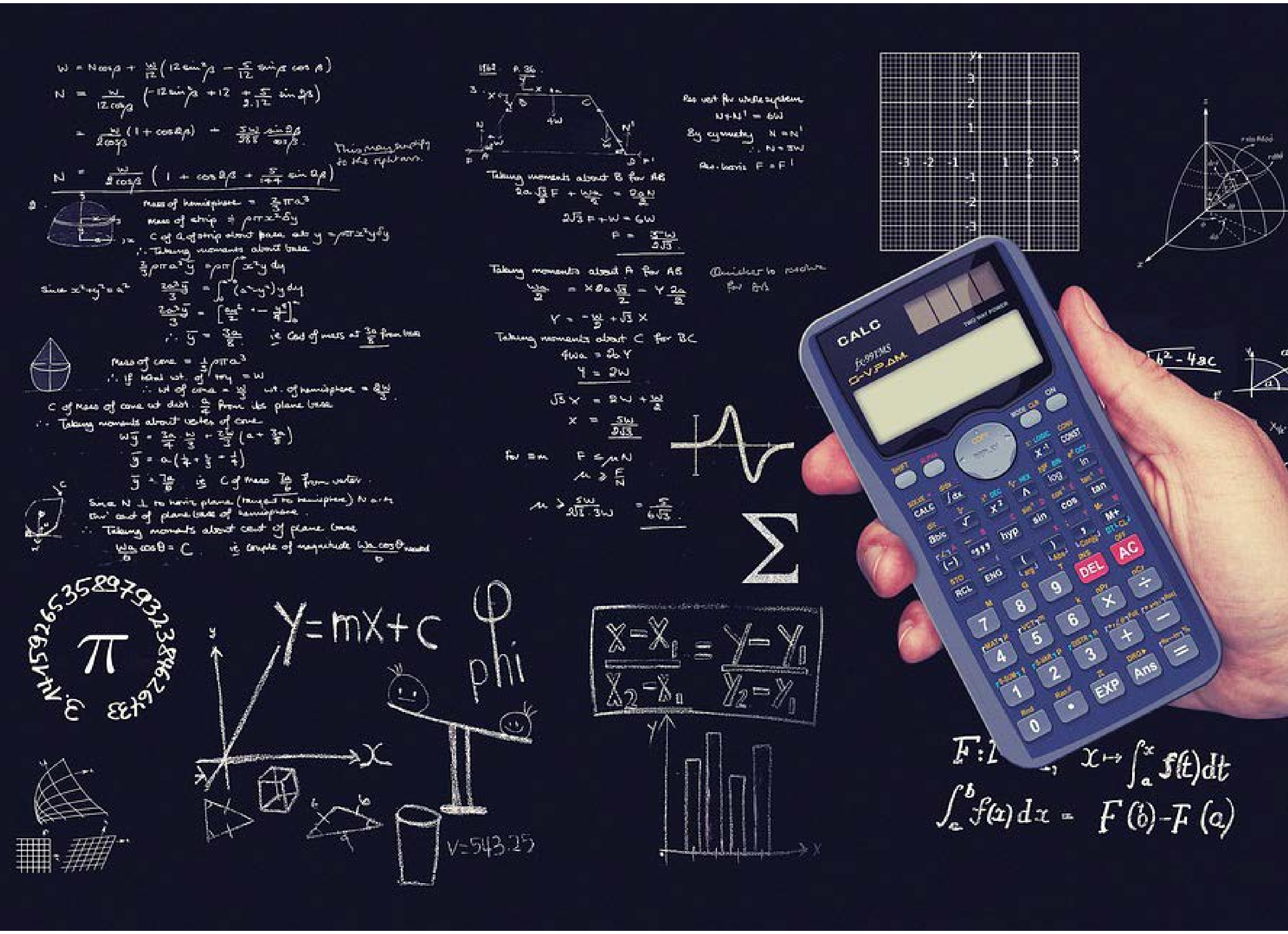
AUTOR: JIMENA SANABRIA

OCTUBRE: 2019

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En esta lectura se puede encontrar cómo determinar el conjunto solución de las ecuaciones trigonométricas, así como determinar las distintas características de las tres funciones trigonométricas básicas.

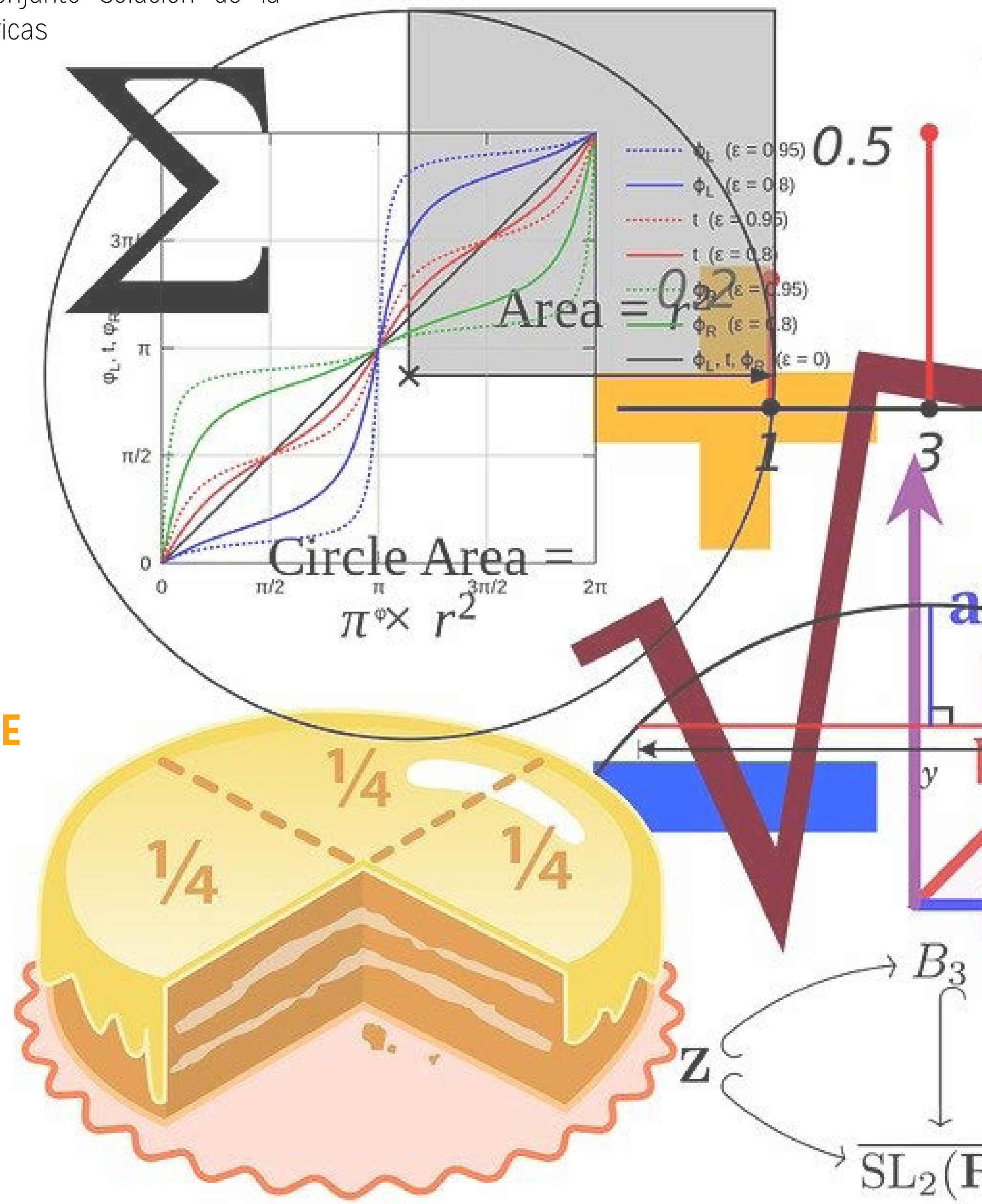


PREGUNTA DISPARADORA

¿En qué nos pueden ayudar en la vida cotidiana el uso de las funciones?

ABSTRACT O RESUMEN

Se describen las características de la función trigonométrica y se muestra el paso a paso para determinar el conjunto solución de la ecuaciones trigonométricas



PALABRAS CLAVE

Función

Ecuación

Trigonométrica

Seno

Coseno

Tangente

Conversiones

Conversión de grados a radianes:

Para convertir un ángulo de grados a radianes se utiliza la fórmula:

$$R = G \bullet \frac{\pi}{180°}$$

Multiplicar el ángulo en grados por $\frac{\pi}{180°}$

Ejemplos:

Convierta los siguientes ángulos de grados a radianes.

1) $400°$

$$R = 400° \bullet \frac{\pi}{180°}$$

$$R = \frac{20\pi}{9}$$

Por lo que $400°$ es igual a $\frac{20\pi}{9}$ rad.

1) $75°$

$$R = 75° \bullet \frac{\pi}{180°}$$

$$R = \frac{5\pi}{12}$$

Por lo que $75°$ es igual a $\frac{5\pi}{12}$ rad.

2) $360°$

$$R = 360° \bullet \frac{\pi}{180°}$$

$$R = 2\pi$$

Por lo que $360°$ es igual a 2π rad.

Conversión de radianes a grados:

Para convertir un ángulo de grados a radianes se utiliza la fórmula:

$$G = R \bullet \frac{180°}{\pi}$$

Multiplicar el ángulo en radianes por $\frac{180°}{\pi}$

Ejemplos:
Convierta los siguientes ángulos de radianes a grados.

2) 4π rad

$$G = 4\pi \bullet \frac{180°}{\pi}$$
$$G = 720°$$

Por lo que 4π rad es igual a $720°$.

3) $\frac{5\pi}{3}$ rad

$$G = \frac{5\pi}{3} \bullet \frac{180°}{\pi}$$
$$G = 300°$$

Por lo que $\frac{5\pi}{3}$ rad es igual a $300°$

4) 3 rad

$$G = 3 \bullet \frac{180°}{\pi}$$
$$G = \frac{540°}{\pi}$$

Por lo que 3 rad es igual a $\frac{540°}{\pi}$

Práctica

1) Convierta los ángulos de grados a radianes:
   a. 74°
   b. 130°
   c. 800°
   d. 70°
   e. 45°
   f. 135°
   g. 300°
   h. 150°
   i. 240°
   j. 215°
   k. 56°
   l. 31°
   m. 78°

2) Convierta los ángulos de radianes a grados:
   a. $\frac{2\pi}{3}$ rad
   b. $\frac{19\pi}{10}$ rad
   c. $\frac{\pi}{60}$ rad
   d. $\frac{3\pi}{14}$ rad

e. 5 rad

f. $\frac{5\pi}{4}$ rad

g. $\frac{7\pi}{6}$ rad

h. 150π rad

i. $\frac{6\pi}{11}$ rad

j. $\frac{\pi}{45}$ rad

k. 4 rad

l. $\frac{2\pi}{9}$ rad

m. $\frac{5\pi}{18}$ rad

n. $\frac{5\pi}{6}$ rad

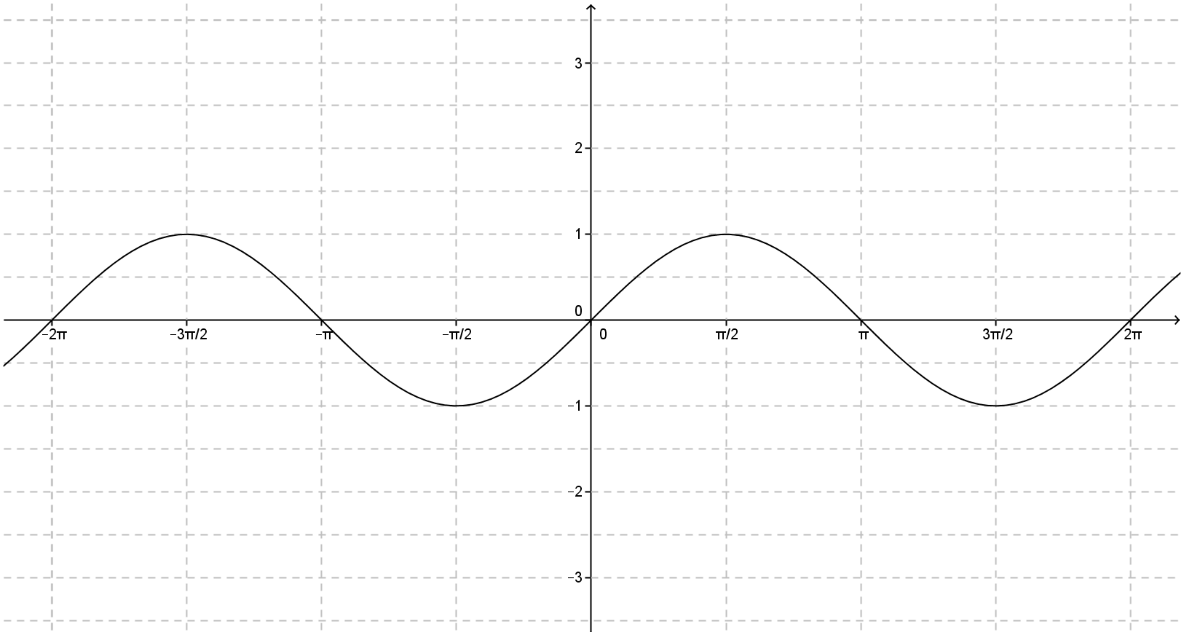
Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilación de péndulos, ciclos comerciales, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, etc. En la aplicación de las funciones trigonométricas relacionadas con fenómenos que se repiten periódicamente, se requiere que los dominios sean conjuntos de números reales.

Función seno:

Criterio: $f(x) = sen(x)$

Gráfica:

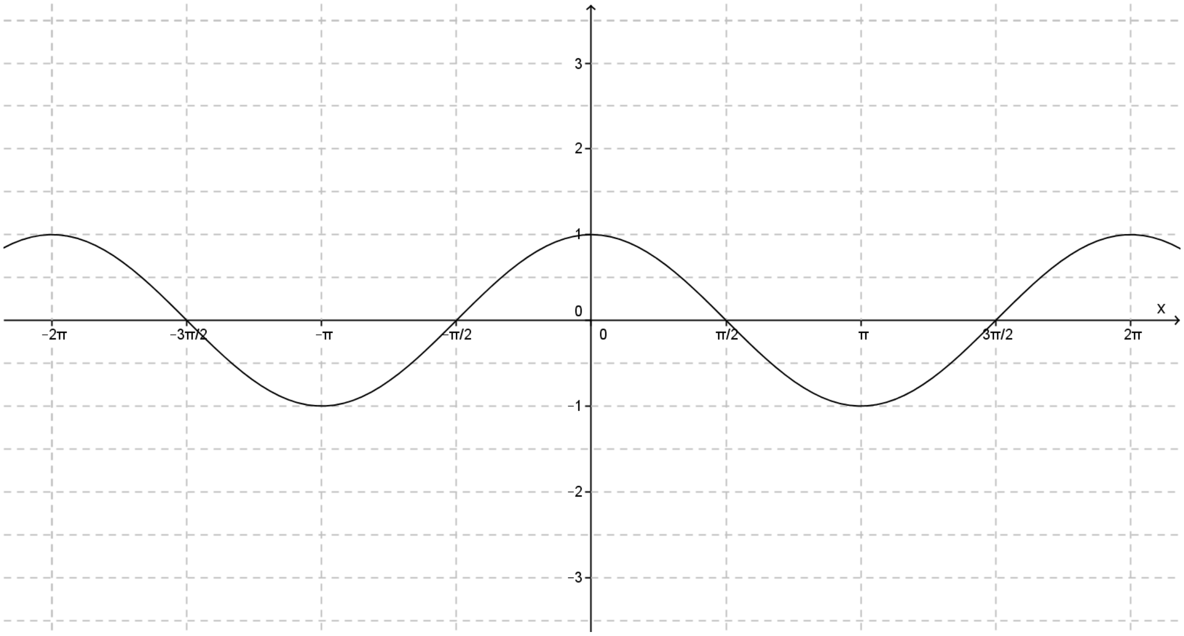


Características:

1) Dominio: $\mathbb{R}$
2) Ámbito: $[-1, 1]$
3) Intersección con el eje x: $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$
4) Intersección con el eje y: $(0, 0)$
5) Periodo: 2π

Función coseno:

Criterio: $f(x) = \cos(x)$
Gráfica:

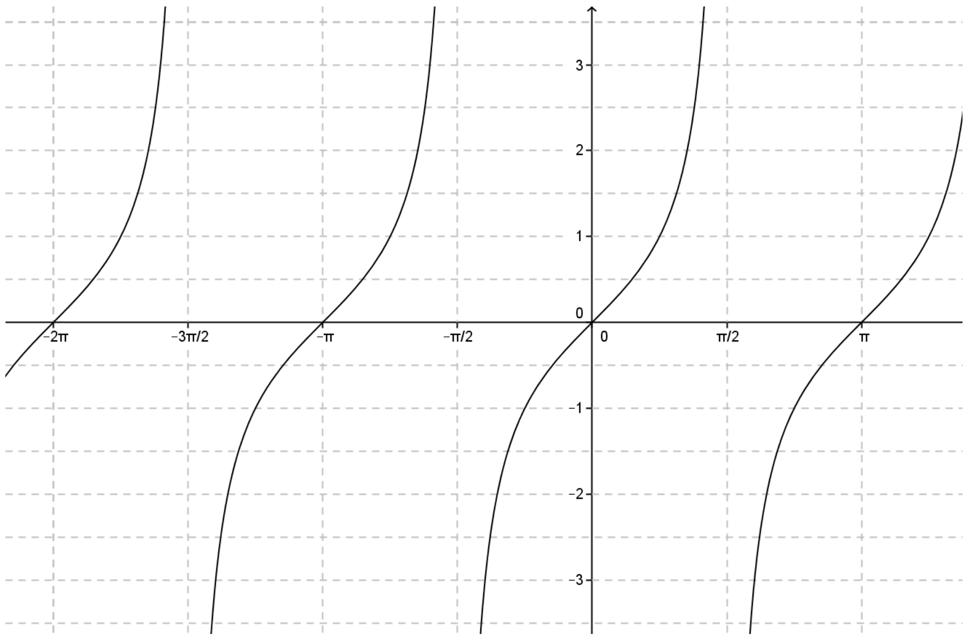


Características:

1) Dominio: $\mathbb{R}$
2) Ámbito: $[-1, 1]$
3) Intersección con el eje x: $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ con k impar
4) Intersección con el eje y: $(0, 1)$
5) Periodo: 2π

Función tangente:

Criterio: $f(x) = \tan(x)$
Gráfica:



Características:

1) Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ con k impar
2) Ámbito: $\mathbb{R}$
3) Intersección con el eje x: $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$
4) Intersección con el eje y: $(0, 0)$
5) Periodo: π

Práctica

Marque con una equis la respuesta correcta:

1. Para la función f dada por $f(x) = \tan x$, con dominio $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, f interseca al eje x en el punto

A) $(\pi, 0)$
B) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
C) $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
D) $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$

2. Analice las siguientes proposiciones:

I. El dominio de la función coseno es $[-1, 1]$
II. La función tangente tiene periodo 2π

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

A) Solo la I
B) Solo la II
C) Ambas
D) Ninguna}

3. Para la función f dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, con dominio $]0, 2\pi[$, f interseca el eje x en el punto

A) $(0, 0)$
B) $(\pi, 0)$
C) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
D) $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

4. Para la función f dada por por $f(x) = \operatorname{sen} x$, con dominio $]2\pi, 4\pi[$, f interseca el eje x en el punto

A) $(2\pi, 0)$
B) $(3\pi, 0)$
C) $\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$
D) $\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$

5. Para la función $f$dada por $f(x) = \cos x$, con dominio $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, f interseca el eje x en el punto

A) $(0, 0)$
B) $(\pi, 0)$
C) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
D) $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

6. Para la función f dada por $f(x) = \cos x$, con dominio $\left]2\pi, \frac{7\pi}{2}\right[$, f interseca el eje x en el punto

A) $(2\pi, 0)$
B) $(3\pi, 0)$
C) $\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$
D) $\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$

7. Para la función f dada por $f(x) = \tan x$, con dominio $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, f interseca al eje x en el punto

A) $(\pi, 0)$
B) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
C) $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
D) $(0, 0)$

8. Para la función f dada por $f(x) = \cos x$, el valor $\cos(3\pi)$ es

A) $\frac{1}{2}$
B) -1
C) 1
D) 0

9. Analice las siguientes proposiciones referidas a la función f con $f(x) = \tan x$

I. f es creciente con $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
II. $f(x) = 0$ si $x = \pi$
III. El ámbito de f es $[-1, 1]$

De ellas, ¿Cuáles son verdaderas?

A) Solo la II
B) Solo la III
C) Solo I y II
D) Solo II y III

10. Para la función f cuyo criterio es $f(x) = \operatorname{sen} x$, analice las siguientes proposiciones

I. Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$entonces f es creciente
II. Si $x \in \left]-\pi, 0\right[$ entonces f es decreciente

De ellas, ¿Cuáles son verdaderas?

A) Solo la I
B) Solo la II
C) Ambas
D) Ninguna

11. Para la función f dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es cierto que

A) Es de periodo 2π
B) Tiene por ámbito $\mathbb{R}$

C) Interseca el eje y en $(0,1)$

D) Interseca el eje x en $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

12. Considere las siguientes proposiciones:

I. El ámbito de la función tangente es $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

II. El dominio de la función coseno es $\mathbb{R}$

De ellas, ¿Cuáles son verdaderas?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

13. Considere las siguientes proposiciones referidas a la función dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$

I. Una preimagen de $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ es $\frac{7\pi}{4}$

II. La gráfica de f interseca el eje x en $(-\pi, 0)$

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

14. Un valor para el que la función f dada por $f(x) = \tan x$, **<u>NO</u>** está definida es

A) π
B) $\frac{\pi}{4}$
C) $\frac{2\pi}{3}$
D) $\frac{3\pi}{2}$

15. Considere las siguientes proposiciones respecto de la función f dada por $f(x) = \cos x$

I. f es estrictamente decreciente $\left]\frac{-\pi}{2},0\right[$

II. La gráfica de f interseca el eje x en $(\pi, 0)$

De ellas, ¿Cuáles son verdaderas?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I

D) Solo la II

Identidades trigonométricas

En matemáticas, las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas, verificables para cualquier valor permisible de la variable o variables que se consideren, es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los que se aplican las funciones.

En nuestros tiempos de avances tecnológicos es necesario y casi prioritario el uso de cálculos y funciones que, a pesar de que fueron creadas hace mucho tiempo, siempre van a ser información y material de vanguardia en el moderno mundo de hoy.

Estas identidades son útiles siempre que se precise simplificar expresiones, que incluyen funciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas elementales:

1) $sen\ \alpha = \frac{1}{\csc \alpha}$
2) $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$
3) $\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$
4) $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$
5) $\csc \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$
6) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
7) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{sen\ \alpha}$
8) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

Identidades trigonométricas Pitagóricas:

1) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
3) $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Identidades trigonométricas complementarias:

1) $sen\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$
2) $\cos \alpha = sen\ (90° - \alpha)$

3) $\tan \alpha = \cot(90° - \alpha)$
4) $\csc \alpha = \sec(90° - \alpha)$
5) $\sec \alpha = \csc(90° - \alpha)$
6) $\cot \alpha = \tan(90° - \alpha)$

Identidades de ángulo doble y triple:

1) $sen\ (2\alpha) = 2sen\ \alpha \cos \alpha$
2) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2sen^2\alpha$
3) $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}$

Demostración de identidades trigonométricas:

Tome uno de los lados de la igualdad y utilizando identidades efectúe las transformaciones necesarias para obtener el otro lado de la igualdad. Además:

1) Haga las transformaciones en el lado que se ve más complicado de la igualdad.
2) Realice la suma o la resta de fracciones.
3) Exprese en términos de senos y cosenos, para luego simplificar.

Ejemplos:

1) Verifique $\cos x \tan x = sen\ x$

$\cos x \tan x$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= \cos x \bullet \frac{sen\ x}{\cos x}$	Aplicar identidad elemental para $\tan x$
$= sen\ x$	Simplificar

2) Verifique $sen\ x \sec x = \tan x$

$sen\ x \sec x$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= sen\ x \bullet \frac{1}{\cos x}$	Aplicar identidad elemental para $\sec x$
$= \frac{sen\ x}{\cos x}$	Simplificar
$= \tan x$	Aplicar identidad elemental para $\frac{sen\ x}{\cos x}$

3) Verifique $\left(1 + \tan^2 x\right)\cos^2 x = 1$

$\left(1 + \tan^2 x\right)\cos^2 x$	Tomar el lado más complicado de la

	igualdad
$= \sec^2 x \cos^2 x$	Aplicar identidad Pitagórica para $1 + \tan^2$
$= \frac{1}{\cos^2 x} \bullet \cos^2 x$	Aplicar identidad elemental para $\sec^2 x$
$= 1$	Simplificar

4) Verifique $(sen\, x + \cos x)^2 + (sen\, x - \cos x)^2 = 2$

$(sen\, x + \cos x)^2 + (sen\, x - \cos x)^2$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= sen^2 x + 2sen\, x \cos x + \cos^2 x + sen^2 x - 2sen\, x \cos x + \cos^2 x$	Desarrollar cada fórmula notable
$= 2sen^2 x + 2\cos^2 x$	Sumar o restar semejantes
$= 2(sen^2 x + \cos^2 x)$	Factorizar por factor común
$= 2 \bullet 1$	Aplicar identidad Pitagórica para $sen^2 x + \cos^2 x$
$= 2$	Realizar la multiplicación

5) Verifique $\cot x + \frac{sen\, x}{1+\cos x} = \csc x$

$\cot x + \dfrac{sen\, x}{1 + \cos x}$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= \dfrac{\cos x}{sen\, x} + \dfrac{sen\, x}{1 + \cos x}$	Aplicar identidad elemental para $\cot x$
$= \dfrac{\cos x\,(1 + \cos x) + sen\, x sen\, x}{sen\, x(1 + \cos x)}$	Realizar la suma de fracciones
$= \dfrac{\cos x + \cos^2 x + sen^2 x}{sen\, x(1 + \cos x)}$	Realizar las operaciones del numerador
$= \dfrac{\cos x + 1}{sen\, x(1 + \cos x)}$	Aplicar identidad Pitagórica para $sen^2 x + \cos^2 x$
$= \dfrac{1}{sen\, x}$	Simplificar
$= \csc x$	Aplicar identidad elemental para $\frac{1}{sen\, x}$

6) Verifique $\cot(90° - \alpha)\,sen(90° - \alpha) = sen\,\alpha$

$\cot(90° - \alpha)\,sen(90° - \alpha)$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= \tan\alpha\cos\alpha$	Aplicar identidad complementaria para $\cot(90° - \alpha)$ y $sen(90° - \alpha)$
$= \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \bullet \cos\alpha$	Aplicar identidad elemental para $\tan\alpha$
$= sen\,\alpha$	Simplificar

7) Verifique $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot^2\alpha = \cot^2\alpha$

$\cot(90° - \alpha)\,sen(90° - \alpha)$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= \tan\alpha\cos\alpha$	Aplicar identidad complementaria para $\cot(90° - \alpha)$ y $sen(90° - \alpha)$
$= \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \bullet \cos\alpha$	Aplicar identidad elemental para $\tan\alpha$
$= sen\,\alpha$	Simplificar

8) Verifique $\frac{\tan^2\alpha - sen^2\alpha}{\tan^2\alpha} = sen^2\alpha$

$\dfrac{\tan^2\alpha - sen^2\alpha}{\tan^2\alpha}$	Tomar el lado más complicado de la igualdad
$= \dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha} - \dfrac{sen^2\alpha}{\tan^2\alpha}$	Separar la fracción
$= 1 - \cot^2\alpha\,sen^2\alpha$	Simplificar y aplicar identidad elemental para $\frac{1}{\tan^2\alpha}$
$= 1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} \bullet sen^2\alpha$	Aplicar identidad elemental para $\cot^2\alpha$
$= 1 - \cos^2\alpha$	Simplificar
$= sen^2\alpha$	Aplicar identidad Pitagórica para $1 - \cos^2\alpha$

Práctica

Marque con equis la respuesta correcta:

1) La expresión $\cot x \csc x$ es equivalente a

A) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$

B) $\frac{1}{\cos x}$

C) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

D) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

2) La expresión $\sec\theta\cot\theta$ es equivalente a

A) $\sec\theta$

B) $\csc\theta$

C) $\operatorname{sen}\theta\sec^2\theta$

D) $\cos\theta\sec^2\theta$

3) La expresión $\cot x \sec x \operatorname{sen} x$ es equivalente a

A) $\cot^2 x$

B) $\tan^2 x$

C) $\cot x$

D) 1

4) La expresión $\tan x \csc x \cos x$ es equivalente a

A) $\tan^2 x$

B) $\tan x$

C) $\cot x$

D) 1

5) La expresión $(1-\cos^2 x)\sec^2 x$ equivale a

A) 1

B) -1

C) $\tan^2 x$

D) $\cot^2 x$

6) Una expresión equivalente a $(1+\cot^2 x)\cos^2 x$ es

A) 1

B) -1

C) $\tan^2 x$

D) $\cot^2 x$

7) La expresión $\frac{1-\tan x}{\csc x}$ es equivalente a

A) $1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$
B) $\cos x-\operatorname{sen} x$
C) $\operatorname{sen} x-\cos x$
D) $\frac{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

8) La expresión $\frac{1-\csc x}{\cot x}$ es equivalente a
A) $\frac{\operatorname{sen} x(\cos x-1)}{\cos x^2}$
B) $\frac{\cos x(\operatorname{sen} x-1)}{\operatorname{sen} x^2}$
C) $1-\sec x$
D) $\frac{\operatorname{sen} x-1}{\cos x}$

9) La expresión$\operatorname{sen} x \cot(90°-x)\sec(90°-x)$ es equivalente con
A) $\tan x$
B) $\cot x$
C) $\cos x$
D) $\csc x$

10) La expresión $\frac{1-\tan x}{\sec x}$ es equivalente a
A) $1-\operatorname{sen} x$
B) $\cos x-\operatorname{sen} x$
C) $\frac{(\operatorname{sen} x-\cos x)\cos x}{\operatorname{sen} x}$
D) $\frac{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

11) La expresión $\cos(90°-\alpha)\cot\alpha$ es equivalente a
A) $\cos\alpha$
B) $-\operatorname{sen}\alpha$
C) $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$
D) $\frac{-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

12) La expresión $\csc\alpha\cot(90°-\alpha)$ es equivalente a

A) $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
B) $\frac{1}{\cos\alpha}$
C) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$
D) $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$

13) La expresión $\tan x \operatorname{sen} x + \cos x$ es equivalente a
A) $\sec x$
B) $2\cos x$
C) $\operatorname{sen}^2 x$
D) $\cos^2 x$

14) La expresión $\csc x - \cos x$ es equivalente a
A) $\frac{1-\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x}$
B) $\tan x \operatorname{sen} x$
C) $\cot x \operatorname{sen} x$
D) $1 - \cos x$

15) Una expresión equivalente a $\csc x - \cot x \cos x$ corresponde a
A) $\cos x$
B) $\operatorname{sen} x$
C) $\sec x$
D) $-\tan x$

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una igualdad que contiene una o varias líneas trigonométricas de arcos desconocidos, se verifica solo para los valores particulares de dichos arcos.

Resolver una ecuación trigonométrica es determinar los valores del arco desconocido.

Para resolver las ecuaciones trigonométricas, se utilizan las propiedades de las identidades trigonométricas, así como distintos métodos de ecuaciones algebraicas.

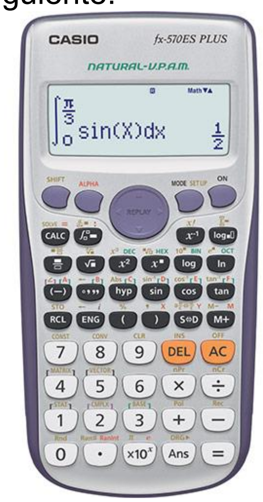
Cuadro de soluciones:

SENO	Encontrar θ
	Luego $\pi - \theta$ o $180° - \theta$

COSENO	Encontrar θ
	Luego $2\pi - \theta$ o $360° - \theta$

TANGENTE	Encontrar θ
	Luego $\pi + \theta$ o $180° + \theta$

Para encontrar θ se puede utilizar la herramienta de la calculadora científica, como la siguiente:



Lo importante es que la calculadora tenga los botones sin, cos y tan.

Ejemplos:

Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones tomando en cuenta que $[0, 2\pi[$.

1) $\cos x + 2 = 0$

$\cos x + 2 = 0$	
$\cos x = -2$	Despejar el $\cos x$
$x = \cos^{-1}(-2)$	Aplicar el arccos
$Error$	Utilizar la calculadora con shift cos
$S = \emptyset$	Indicar el conjunto solución

2) $2sen\ x - 6 = 0$

$2sen\ x - 6 = 0$	
$2sen\ x = 6$	Despejar el $sen\ x$

$$sen\ x = \frac{6}{2}$$
$$sen\ x = 3$$
$$x = \text{sen}^{-1}(3)$$ Aplicar el arcsen
$$Error$$ Utilizar la calculadora con shift sin
$$S = \emptyset$$ Indicar el conjunto solución

3) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\cos x = \sqrt{2}$$ Despejar el $\cos x$
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ Aplicar el arccos
$$x_1 = 45°$$ Utilizar la calculadora con shift cos
$$x_2 = 360° - 45$$ Obtener la segunda solución para cos
$$x_2 = 315°$$
$$S = \{45°, 315°\} \text{ o } S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$ Indicar el conjunto solución

4) $2\sec x + 1 = 0$

$$2\sec x + 1 = 0$$
$$2 \bullet \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$$ Aplicar identidad elemental para $\sec x$

$$\frac{2}{\cos x} = -1$$ Despejar el $\cos x$
$$2 = -1 \bullet \cos x$$
$$\frac{2}{-1} = \cos x$$
$$-2 = \cos x$$
$$x = \cos^{-1}(-2)$$ Aplicar el arccos
$$Error$$ Utilizar la calculadora con shift cos
$$S = \emptyset$$ Indicar el conjunto solución

5) $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

$$\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$$

$$\sqrt{3}\tan x = -1$$ Despejar el $\tan x$
$$\tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$ Aplicar el arctan

$x_1 = -30°$ Utilizar la calculadora con shift tan

$x_2 = 180° + -30°$ Obtener la segunda solución para tan

$x_2 = 150°$

La respuesta no se da con ángulos negativo, por lo que se pasa a positivo sumándole 360°

$-30° + 360° = 330°$

$S = \{150°, 330°\}$ Indicar el conjunto solución

6) $\cos x - \cos x \, sen\, x = 0$

$\cos x - \cos x \, sen\, x = 0$

$\cos x\,(1 - sen\, x) = 0$ Factorizar por factor común

$\cos x = 0 \qquad 1 - sen\, x = 0$ Separar cada factor igualando a cero

$x = \cos^{-1}(0)$	$-sen\, x = -1$
$x_1 = 90°$	$sen\, x = \frac{-1}{-1}$
$x_2 = 360° - 90°$	$sen\, x = 1$
$x_2 = 270°$	$x = sen^{-1}(1)$
	$x_1 = 90°$
	$x_2 = 180° - 90°$
	$x_2 = 90°$

Resolver cada ecuación

$S = \{90°, 270°\}$ Indicar el conjunto solución

7) $\tan x \, sen\, x = sen\, x$

$\tan x \, sen\, x = sen\, x$

$\tan x \, sen\, x - sen\, x = 0$ Igualar a cero

$sen\, x(\tan x - 1) = 0$ Factorizar por factor común

$sen\, x = 0 \qquad \tan x - 1 = 0$ Separar cada factor igualando a cero

$x = \mathrm{sen}^{-1}(0)$	$\tan x = 1$
$x_1 = 0°$	$x = \tan^{-1}(1)$
$x_2 = 180° - 0°$	$x_1 = 45°$
$x_2 = 180°$	$x_2 = 180° + 45°$
	$x_2 = 225°$

Resolver cada ecuación

$S = \{0°, 45°, 180°, 225°\}$ Indicar el conjunto solución

8) $4sen^2x - 3 = 0$

$$4sen^2x - 3 = 0$$
$$4sen^2x = 3$$
Despejar el $sen\ x$
$$sen^2x = \frac{3}{4}$$
$$sen\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Igualar el $sen\ x$ a cada valor

$sen\ x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ $\qquad$ $sen\ x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

Resolver cada ecuación

$x = \text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ $\qquad$ $x = \text{sen}^{-1}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$

$x_1 = 60°$ $\qquad$ $x_1 = -60°$

$x_2 = 180° - 60°$ $\qquad$ $x_2 = 180° - -60°$

$x_2 = 120°$ $\qquad$ $x_2 = 240°$

$-60° + 360°$
$= 300$

$S = \{60°, 120°, 240°, 300°\}$ o $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Indicar el conjunto solución

9) $4\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$$4\cos^2 x - 2\cos x = 0$$
$$2\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$$
Factorizar por factor común

$2\cos x = 0$ $\qquad$ $2\cos x - 1 = 0$

Separar cada factor igualando a cero

Resolver cada ecuación

$\cos x = \frac{0}{2}$ $\qquad$ $2\cos x = 1$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \cos^{-1}(0)$ $\qquad$ $x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x_1 = 90°$ $\qquad$ $x_1 = 60°$

$x_2 = 360° - 90°$ $\qquad$ $x_2 = 360° - 60°$

$x_2 = 270°$ $\qquad$ $x_2 = 300°$

$S = \{60°, 90°, 270°, 300°\}$ o $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Indicar el conjunto solución

Práctica

Marque con una equis la respuesta correcta, las ecuaciones están definidas en $[0, 2\pi[$:

1) El conjunto solución de $\cos x = \sqrt{2} - \cos x$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

2) El conjunto solución de $\operatorname{sen} x \tan x = \operatorname{sen} x$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

3) El conjunto solución de $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

4) El conjunto solución de $\operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen} x$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

5) El conjunto solución de $2 \operatorname{sen} x = -1$ es

A) $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

6) Las soluciones de la ecuación $2 + \sqrt{3}\tan\theta = 3$ son

A) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$

C) $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$

7) El conjunto de soluciones de $(1 - 2\cos x)\operatorname{sen} x = 0$ es

A) $\left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{\pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

8) Las soluciones de la ecuación $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$ son

A) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$

C) $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$

9) Dos soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$ son

A) $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$

C) π y $\frac{3\pi}{2}$

D) π y $\frac{\pi}{2}$

10) El conjunto solución de $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)(\sec x - 2) = 0$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$

11)El conjunto solución de $2\sqrt{3}\operatorname{sen} x = \sqrt{6}$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

12)El conjunto de todas las soluciones de $\sec^2 x - 1 = -\sec x + 1$ es

A) $\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\pi, \frac{\pi}{3}\right\}$

13)El conjunto solución de $2\operatorname{sen}^2 x = -\operatorname{sen} x$ es

A) $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{0, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

14)Dos soluciones de $4\tan^2\theta = 3\sec^2\theta$ son

A) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{2\pi}{3}$

15)El conjunto solución de $2\,\text{sen}\,x\cot x - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ es

A) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
B) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
C) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
D) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Porras, V. (2005) *Matemática 11°: Teoría y ejercicios*. Ed.- San José, C.R.: V, Porras N.

Chaverri, J. (2004) *Apuntes de clases de matemática*.

Cruse, A. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de Cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica* (4° ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Fraga, R. (1992). *Calculus problems for a new century*. Mishigan: The Mathema- tical Association of America.

Hughes-Hallett, D. y Gleason, A. M. (2001). *Cálculo* (2° ed.). México D.F.: Cecsa

Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para Ingeniería 1*. (3° ed.). México: Limusa Wiley.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7° ed.). México: Oxford University PressUNAM.

Solow, A. (1999). *Learning by discovery*. Mishigan: The Mathematical Association of America.

Swokowsky, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica* (2° ed.). México: Grupo Editorial de Iberoamérica.

APÉNDICES

SOLUCIONES PARTE 1

1) Convierta los ángulos de grados a radianes:

a. $\frac{74\pi}{90}$
b. $\frac{13\pi}{18}$
c. $\frac{40\pi}{9}$
d. $\frac{7\pi}{18}$
e. $\frac{\pi}{4}$
f. $\frac{3\pi}{4}$
g. $\frac{5\pi}{3}$
h. $\frac{5\pi}{6}$
i. $\frac{4\pi}{3}$
j. $\frac{43\pi}{36}$
k. $\frac{14\pi}{45}$
l. $\frac{31\pi}{180}$
m. $\frac{13\pi}{30}$

2) Convierta los ángulos de radianes a grados:

a. $120°$
b. $342°$
c. $3°$
d. $\frac{270°}{7}$
e. $\frac{900°}{\pi}$
f. $225°$
g. $210°$
h. $27\,000°$
i. $\frac{1080°}{11}$
j. $4°$
k. $\frac{720°}{\pi}$
l. $40°$
m. $50°$
n. $150°$

SOLUCIONES PARTE 2

1. A
2. D
3. B
4. B
5. C
6. C
7. A
8. B
9. C
10. A
11. A
12. B
13. A
14. B

SOLUCIONES PARTE 3

1. C
2. B
3. D
4. D
5. C
6. D
7. D
8. D
9. A
10. B
11. A
12. B
13. A
14. A
15. B

SOLUCIONES PARTE 4

1) B
2) C
3) C
4) A
5) A
6) B
7) D
8) D
9) C
10) A
11) A
12) B
13) D
14) B
15) D