San Marcos

ECUACIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

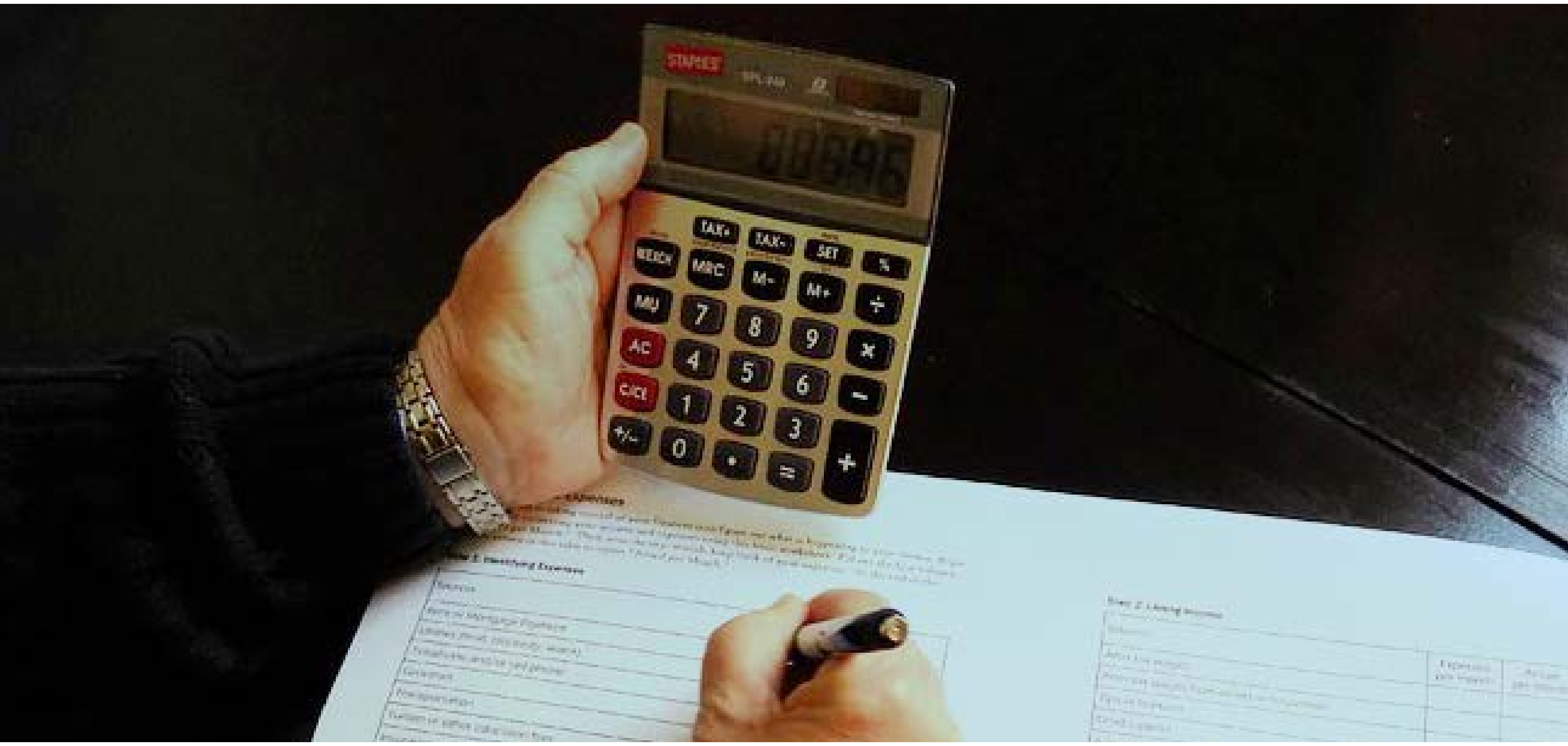
AUTOR: JIMENA SANABRIA

OCTUBRE: 2019

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

Se muestra el paso a paso para determinar la solución de distintas ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

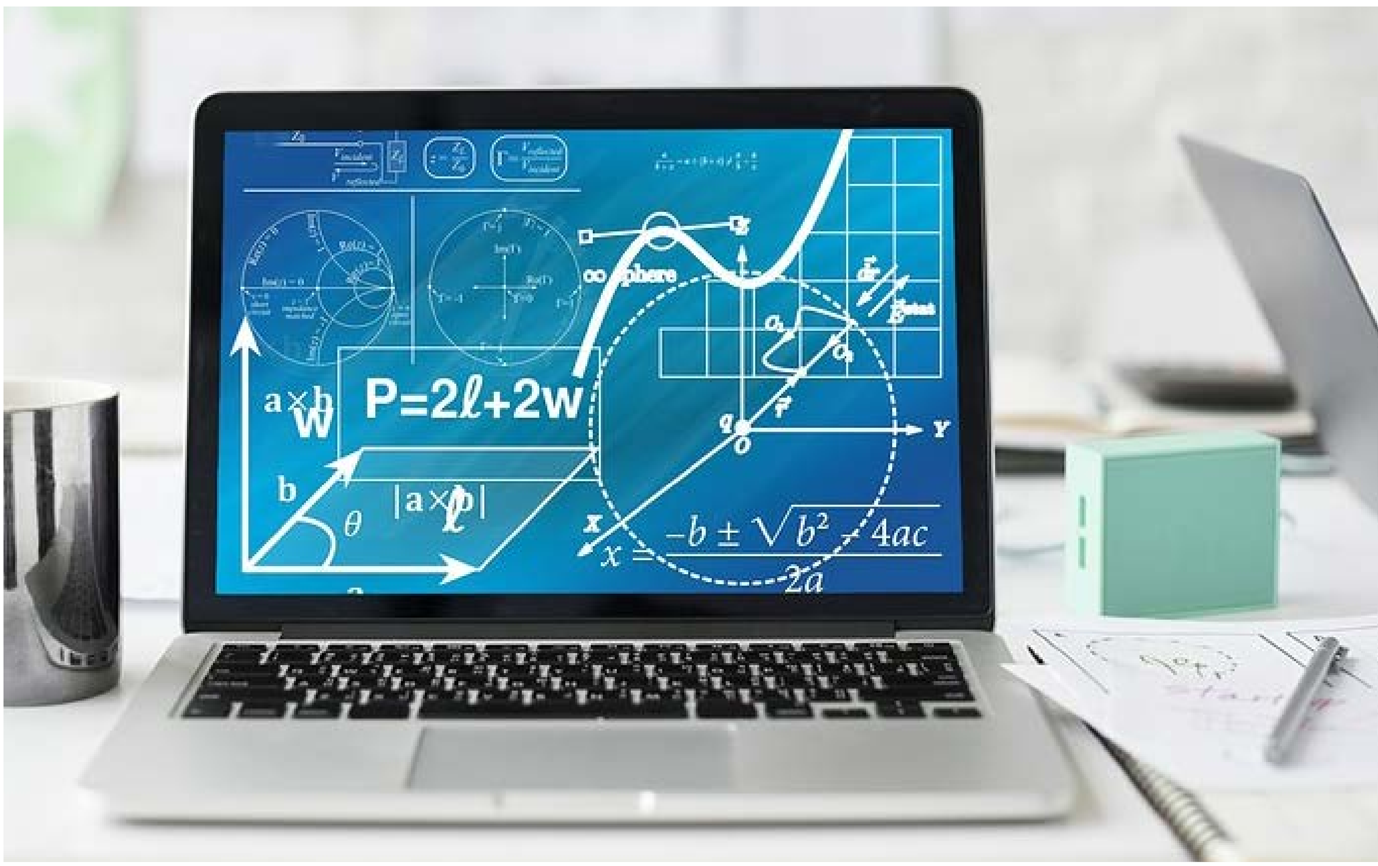


PREGUNTA DISPARADORA

¿Cómo encontrar el conjunto solución de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas?

ABSTRACT O RESUMEN

Se explica paso a paso cómo determinar el conjunto solución de una ecuación exponencial o logarítmica.



PALABRAS CLAVE

Ecuaciones

Exponencial

Logarítmica

Conjunto

Solución

Ecuación exponencial

Para resolver ecuaciones exponenciales emplearemos dos métodos, a saber:

- Pasando de la ecuación $b^{f(x)} = b^{g(x)}$ a la ecuación equivalente $f(x) = g(x)$
- Introduciendo nuevas variables que faciliten la manipulación de los miembros de la ecuación (sustitución).

Ejemplos:

- Resolvamos la ecuación $4^{x-1} = 64^{1-x}$

  Factorizar cada base: $(2^2)^{x-1} = (2^6)^{1-x}$
  Se puede transformar a: $2^{2x-2} = 2^{6-6x}$ (propiedad de potencia: potencia de una potencia)
  Lo cual es equivalente a:

$$\begin{aligned}&2x-2=6-6x\\&2x+6x=6+2\\&8x=8\\&x=1\\&S=\{1\}\end{aligned}$$

- Resuelva para x: $5^{3x-1} = 1$
  Como toda potencia elevada a la cero es igual a1, entonces: $5^{3x-1} = 5^0$
  Lo cual es equivalente a:

$$\begin{aligned}&3x-1=0\\&3x=1\\&x=\frac{1}{3}\\&S=\left\{\frac{1}{3}\right\}\end{aligned}$$

- Resuelva para x: $\left(\frac{9}{4}\right)^{x-5} = \frac{8}{27}$

Factorizar cada base: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x-5)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

Invertir una de las bases, cambiando de signo el exponente, para tener bases iguales:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

Lo cual es equivalente a:

$$2x - 10 = -3$$
$$2x = -3 + 10$$
$$2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2}$$
$$S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

- Resuelva para x: $2^{2x} + 4^{x} = 0{,}25$

  Factorizar las bases: $2^{2x} + 2^{2x} = \frac{1}{4}$

  $2 \cdot 2^{2x} = \frac{1}{2^2}$ (Sumar semejantes)

  $2^{1+2x} = 2^{-2}$ (Propiedad de potencias: multiplicación de bases sumo exponente. Invertir base y cambiar signo del exponente)

  Lo cual es equivalente:

$$1 + 2x = -2$$
$$2x = -2 - 1$$
$$2x = -3$$
$$x = \frac{-3}{2}$$
$$S = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$$

- Resolvamos la ecuación $3^{2x} - 2 \bullet 3^{x} - 63 = 0$

  Realizaremos un cambio de variable $u = 3^{x}$.

  Obtenemos la ecuación cuadrática

  $u^2 - 2u - 63 = 0$, cuyas raíces (soluciones) son $u_1 = -7$ y $u_2 = 9$ (obtenidas por fórmula general).

  Por esta razón, las raíces de la ecuación dada se obtienen resolviendo el conjunto de ecuaciones:

  $3^{x} = -7$ y $3^{x} = 9$

  La primer ecuación no tiene raíces, ya que $3^{x} > 0$, con cualquier valor para x.

  De la segunda ecuación obtenemos: $3^{x} = 9$

$$3^{x} = 3^{2}$$
$$x = 2$$
$$S = \{2\}$$

Práctica

Ejercicios de desarrollo: Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

1. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{125}\right)^{3-x} - \frac{25}{9} = 0$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x} = \frac{27}{8}$
3. $0{,}6^{x} \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^{3}$
4. $5^{x+1} + 5^{x} = 750$
5. $5^{x+2} + 5^{x-2} = 626$
6. $2^{x+3} + 2^{x-2} = 33$
7. $7^{x+1} + 7^{x-1} = 50$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 0{,}125$
9. $\left(\frac{25}{16}\right)^{x} \cdot \left(\frac{64}{125}\right)^{x-1} = \frac{4}{5}$
10. $5^{\frac{2x-3}{1-x}} = 125$
11. $8^{\frac{5x-2}{5-2x}} = 0{,}25$
12. $7^{3x-4} = \frac{1}{49^{x}}$
13. $9^{x-3} = \sqrt[4]{81}$
14. $8^{x} = 4 \cdot 16^{x}$
15. $16^{x} = 4^{\frac{x}{2}} \cdot 8$
16. $\left(\frac{25}{9}\right)^{x-1} = \sqrt[4]{\frac{125}{27}}$

Ecuación logarítmica

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
2. $\log_a 1 = 0$ El logaritmo de 1 en cualquier base es 0
3. $\log_a a = 1$ Si el argumento es igual a la base el logaritmo es 1
4. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ Si el argumento es un producto, el logaritmo se expresa como suma de logaritmos en la base original de sus factores

5. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ Si el argumento es una división, el logaritmo se expresa como resta de logaritmos en la base original de sus factores
6. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ Si el argumento es una potencia, el exponente pasa a multiplicar al logaritmo
7. $\log_a a^n = n$. Si la base y el argumento son iguales, solo queda el exponente de la potencia.
8. $b^{\log_b x} = x$. Si una potencia está elevada a un logaritmo y ambas bases son iguales, solo queda el argumento.

Para resolver ecuaciones logarítmicas, se deben utilizar las propiedades anteriores, para así simplificar la ecuación y se pueda resolver la ecuación resultante.

Observación:

En el proceso de resolución de ecuaciones que involucren logaritmos, los valores de la incógnita, que se obtienen, no siempre son soluciones de la ecuación original, por lo tanto para determinar el conjunto solución es necesario verificar cuales de los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original.

Ejemplos:

1. $3^{-2x+5} = 1$

$3^{-2x+5} = 1$	Convertir a logaritmo
$\log_3 1 = -2x + 5$	Resolver el logaritmo
$0 = -2x + 5$	Despejar la ecuación lineal
$2x = 5$	
$x = \frac{5}{2}$	
$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$	Indicar el conjunto solución

2. $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15$

$\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15$	
$(x+3)(x+5) = 15$	Logaritmo a ambos lados, se cancelan
$x^2 + 5x + 3x + 15 = 15$	Resolver la multiplicación de paréntesis
$x^2 + 5x + 3x + 15 - 15 = 0$	Igualar a cero la ecuación cuadrática
$x^2 + 8x = 0$	
$\Delta = (8)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 0$	Calcular el discriminante
$\Delta = 64$	
$x_1 = \frac{-8+\sqrt{64}}{2 \bullet 1}$ $\quad x_2 = \frac{-8-\sqrt{64}}{2 \bullet 1}$	Determinar las soluciones
$x_1 = 0$ $\quad x_2 = -8$	

$\ln[(0+3)(0+5)] = \ln 15$ | $\ln[(-8+3)(-8+5)] = \ln 15$ | Realizar la prueba

$S = \{0, -8\}$ Indicar el conjunto solución

3. $\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

$\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 5x + 5$ Logaritmo a ambos lados, se cancelan

$x^2 - x^2 - 3x + 5x = 5 - 2$ Despejar la ecuación lineal

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$\ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 5\right)$ Realizar la prueba

$\ln\left(\frac{-1}{4}\right) = \ln\left(\frac{-1}{4}\right)$

El logaritmo no existe

$S = \{\quad\}$ Indicar el conjunto solución

4. $\log(x-3) + \log(x+2) = \log(5x - 14)$

$\log(x-3) + \log(x+2) = \log(5x - 14)$

$\log(x-3)(x+2) = \log(5x - 14)$ Aplicar propiedad de suma de logaritmos

$(x-3)(x+2) = 5x - 14$ Logaritmo a ambos lados, se cancelan

$x^2 + 2x - 3x - 6 = 5x - 14$ Resolver la multiplicación de paréntesis

$x^2 + 2x - 3x - 6 - 5x + 14 = 0$ Igualar a cero la ecuación cuadrática

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 8$ Calcular el discriminante

$\Delta = 4$

$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \bullet 1}$ $x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \bullet 1}$ Determinar las soluciones

$x_1 = 4$ $x_2 = 2$

$\log(4-3) + \log(4+2) = \log(5(4) - 14)$ Realizar la prueba

$\log 6 = \log 6$

$\log(2-3) + \log(2+2) = \log(5(2) - 14)$

El logaritmo no existe

$S = \{4\}$ Indicar el conjunto solución

5. $2\log(1-2x) = \log(-x+1)$

$\log(1-2x)^2 = \log(-x+1)$ Aplicar la propiedad de la potencia

$(1-2x)^2 = -x + 1$ Cancelar los logaritmos y resolver la ecuación resultante

$1 - 4x + 4x^2 = -x + 1$

$4x^2 - 4x + x + 1 - 1 = 0$
$4x^2 - 3x = 0$
$x(4x - 3) = 0$
$x = 0 \qquad 4x - 3 = 0$
$x = \frac{3}{4}$

$2\log(1 - 2 \bullet 0) = \log(-0 + 1)$
$0 = 0$

Realizar la prueba para cada posible solución.

$$2\log\left(1 - 2 \bullet \frac{4}{3}\right) = \log\left(-\frac{4}{3} + 1\right)$$

El logaritmo no existe

$S = \{0\}$

Indicar el conjunto solución

4. $\ln(x - 10) - \ln(x - 7) = \ln 2$

$\ln\left(\frac{x-10}{x-7}\right) = \ln 2$

Aplicar la propiedad del cociente

$\frac{x-10}{x-7} = 2$

Cancelar logaritmos y resolver la ecuación resultante

$x - 10 = 2(x - 7)$
$x - 10 = 2x - 14$
$x - 2x = -14 + 10$
$-x = -4$
$x = 4$

$\ln(4 - 10) - \ln(4 - 7) = \ln 2$

El logaritmo no existe

Realizar la prueba para cada posible solución.

Indicar el conjunto solución

$S = \emptyset$

5. $3^{1-2x} = 2^{x+5}$

$\ln 3^{1-2x} = \ln 2^{x+5}$

Colocar logaritmos a ambos lados

$(1 - 2x)\ln 3 = (x + 5)\ln 2$
$\ln 3 - 2x\ln 3 = x\ln 2 + 5\ln 2$
$-2x\ln 3 - x\ln 2 = 5\ln 2 - \ln 3$
$-x(\ln 3 + \ln 2) = 5\ln 2 - \ln 3$
$-x = \frac{5\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 + \ln 2}$
$x = \frac{-5\ln 2 + \ln 3}{\ln 3 + \ln 2}$

Aplicar la propiedad de la potencia y resolver la ecuación resultante

$$S = \left\{\frac{-5\ln 2 + \ln 3}{\ln 3 + \ln 2}\right\}$$

Indicar el conjunto solución

Práctica

Ejercicios de desarrollo: Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

1. $7^{3x-2} = 1$
2. $3^x - 3^{1-x} = 2$
3. $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$
4. $e^x - 6e^{-x} = 1$
5. $3^{2x+1} - 5 = 11$
6. $log_2 x = 8$
7. $log_5 x = -1$
8. $log_3 4 \cdot log_5 x = -1$
9. $\log(x+6) - \log(2x-1) = 0$
10. $log_3(x+2) + log_3(x-4) = 3$
11. $3\log x - \log 30 = \log\frac{x^2}{5}$
12. $10^{7-2x} = 3^{x+5}$
13. $5^{x+2} = 4^{x-1}$
14. $-\log(x-1) = 2$
15. $-\log(x-2) = 1$
16. $2\log_5(x-2) - \log_5(x+4) = \log_5 3$

APÉNDICES

SOLUCIONES PARTE 1

1. $\{3\}$
2. $\{3\}$
3. $\left\{\frac{-5}{2}, 3\right\}$
4. $\{3\}$
5. $\{2\}$
6. $\{2\}$
7. $\{1\}$
8. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
9. $\{4\}$
10. $\left\{\frac{6}{5}\right\}$
11. $\left\{\frac{-4}{11}\right\}$
12. $\left\{\frac{4}{5}\right\}$
13. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$
14. $\{-2\}$
15. $\{1\}$
16. $\left\{\frac{11}{8}\right\}$

SOLUCIONES PARTE 2

Ejercicios de desarrollo: Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

1. $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$
2. $S = \{0\}$
3. $S = \{-2{,}58\}$
4. $S = \{\ln 3\}$
5. $S = \{0{,}76\}$
6. $S = \{256\}$
7. $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$
8. $S = \{0{,}27\}$
9. $S = \{7\}$
10. $S = \{\quad\}$
11. $S = \{6\}$
12. $S = \{1{,}82\}$
13. $S = \{-30{,}63\}$
14. $S = \left\{\frac{101}{100}\right\}$
15. $S = \left\{\frac{21}{10}\right\}$
16. $S = \{8\}$