MATRICES Y DETERMINANTES

AUTOR: JAIRO ARIZA HERREÑO

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Anteriormente el álgebra lineal era parte de los planes de estudio de los estudiantes de matemáticas y física principalmente, y también recurrían a ella aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como la estadística multivariable (Grossman, 2012). Esta tendencia comenzó a cambiar y se han encontrado aplicaciones en biología, estadística, química, economía, finanzas, psicología, sociología e ingeniería, entre muchas otras áreas del conocimiento. Entre las aplicaciones que utilizan álgebra lineal están la transmisión de información, el desarrollo de efectos especiales en películas y video, la grabación de sonido, el desarrollo de motores (máquinas) de búsqueda en internet y el análisis económico (Kolman, 2006).

En ingeniería civil se utiliza para analizar los esfuerzos que deben soportar las estructuras en una construcción, en ingeniería electrónica los elementos conectados entre sí se pueden representar por medio de una matriz, en ingeniería de telecomunicaciones los sistemas de comunicación simultánea de múltiples entradas y salidas se manejan por medio de determinantes que juegan un papel importante en la estrategia de codificación de la información, en ingeniería óptica la aplicación de vectores en dos y tres dimensiones nos permiten representar diversos fenómenos naturales relacionados con la propagación y percepción de la luz, y así podríamos seguir enumerando una gran cantidad y variedad de aplicaciones del álgebra línea. De ahí la importancia del estudio de esta asignatura para el desarrollo profesional de los futuros ingenieros.

Lectura recomendada

Antes de comenzar le recomendamos que realice la lectura complementaria:

Bosquejo histórico del álgebra lineal

Juan Boza Cordero

Una vez abordado el documento es importante que realice la actividad control de lectura. Esta la encuentra disponible en la página principal de este eje.

Matrices y determinantes

Matrices

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como las ciencias sociales, la economía, la física, la estadística, las diferentes ramas de la matemática y, por supuesto, la ingeniería. De ahí la importancia de conocer y familiarizarnos con la teoría básica sobre los tipos de matrices, sus operaciones y propiedades para posteriormente poderlas aplicar a la solución de problemas en diferentes contextos que nos ofrecen las áreas del conocimiento.

Definición

Sean **m** y **n** números reales, una matriz A de tamaño **m** x **n** es un arreglo rectangular de números organizados en **m** filas o renglones y en **n** columnas, en donde el total de números que componen la matriz está dado por el producto **m** x **n** a cada número a_{ij} le corresponde una determinada posición dentro de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Por lo general las matrices se denotan con letras mayúsculas A, B, C, ...X, Y, Z, mientras que sus elementos se denotan con letras minúsculas a, b, c, …x, y, z. Los **elementos** de una matriz siempre se ubican por filas y columnas, por ejemplo, el elemento a_{32} se encuentra en la fila 3 y en la columna 2 y el elemento a_{ij} está en la fila i y en la columna j, en donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$.

El **tamaño** de una matriz está determinado por el número de filas y el número de columnas que forman la matriz, tomando siempre primero el número de filas y luego el número de columnas. Si una matriz es de tamaño 4 x 3 quiere decir que tiene cuatro filas y tres columnas.

Ejemplo

Ejemplo 1

Posición de los elementos de una matriz

En la siguiente matriz indique cuáles números corresponden a los elementos a_{12}, a_{32}, a_{33} y a_{23}.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

En este caso el elemento a_{12} corresponde al número 4 puesto que este se encuentra en la fila 1 y la columna 2. El elemento a_{32} es el número 10 ya que es el que se encuentra en la fila 3 y columna 2. El elemento a_{33} corresponde al número 7 que está ubicado en la fila 3 y la columna 3. Finalmente, el elemento a_{23} corresponde al número 8 que se ubica en la fila 2 y la columna 3.

Ejemplo 2

Tamaño de una matriz

Indique el tamaño de cada una de las siguientes matrices:

$$a)\ D \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad b)\ C = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 14 & 21 \end{bmatrix} \quad c)\ F = \begin{bmatrix} 11 & 34 & 56 \\ -78 & 35 & 6 \end{bmatrix}$$

La matriz D es de tamaño 3x2 ya que tiene 3 filas y dos columnas. La matriz C es de tamaño 3x3 puesto que tiene 3 filas y 3 columnas. La matriz F es de tamaño 2x3 pues está conformada por dos filas y tres columnas.

Instrucción

Para repasar su comprensión sobre lo dicho realice el siguiente ejercicio:

- En la siguiente matriz indique a qué elementos corresponden los números 0, 2, 6 y 9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- 2. Construya una matriz con cada uno de los siguientes tamaños: 2x2, 3x4, 1x5 y 4x2

Clases de matrices

Podemos encontrar diversos tipos o clases de matrices dependiendo de la forma en que se presentan, algunas de ellas con mucha utilidad y algunas otras no tanta. En este apartado las nombraremos e ilustraremos con ejemplos y en posteriores ejes profundizaremos en la aplicación de algunas, cuyo concepto y utilidad son de gran relevancia.

- Matriz cuadrada: es la que tiene igual número de filas y de columnas, por ejemplo, una matriz 2x2, 3x3, 4x4, etc.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}_{2x2}$$

- Matriz rectangular: es aquella en la que el número de filas y el número de columnas no son iguales, una matriz 2x4, 3x5, 6x2, etc.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{2x3} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$$

- Matriz escalonada: es aquella en la que el primer elemento no nulo de cada fila es uno y está a la derecha del elemento no nulo de la fila superior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz escalonada reducida: es una matriz escalonada en la que el elemento que se encuentra encima de cada elemento no nulo en cada fila también es cero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular superior: es la matriz cuadrada en la que todos los elementos que se encuentran por debajo de su diagonal son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: es la matriz cuadrada en la que todos los elementos que se encuentran por encima de su diagonal son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- Matriz identidad: es la matriz cuadrada en la que todos los elementos de su diagonal son unos y el resto son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz nula: es aquella en la cual todos sus elementos son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz traspuesta: dada una matriz A, su traspuesta A^t es la matriz en la cual las filas de A son las columnas de A^t.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 9 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

¡Importante!

Los conceptos de matriz inversa, de cofactores, adjunta y ampliada se desarrollarán cuando se trabajen los temas de determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Operaciones y álgebra de matrices

Con las matrices es posible realizar ciertas operaciones que al aplicarlas nos facilitan realizar cálculos de manera más eficiente y rápida, dentro de estas operaciones destacamos las siguientes:

- Suma y resta de matrices: esta operación está definida únicamente para matrices que tienen el mismo tamaño, es decir, que tienen la misma cantidad de filas y de columnas y se define de la siguiente manera para dos matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & & b_{ij} & & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & & b_{ij} & & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma de A + B está definida por la matriz:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{13} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3j}+b_{3j} & \cdots & a_{3n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & & a_{ij}+b_{ij} & & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, para sumar las matrices lo que hacemos es sumar los componentes de A que corresponden a la misma posición con los componentes de B.

Ejemplo 3

Suma de matrices

Dadas las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 10 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Encuentre la suma A+B:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 5+9 \\ 7+10 & -4-5 \\ 3-6 & 0+8 \end{bmatrix}$$

Entonces A + B queda:

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 17 & -9 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Para la resta funciona de la misma manera solo que los componentes correspondientes se restan.

Escalar

Son los números reales constantes o complejos que se utilizan para describir un fenómeno físico o de otro tipo.

- Multiplicación de una matriz por un escalar: dada una matriz A de tamaño m x n y α escalar (número), la matriz αA está definida de la siguiente manera:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & \alpha a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \alpha a_{i3} & & \alpha a_{ij} & & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \cdots & \alpha a_{mj} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & \alpha a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \alpha a_{i3} & & \alpha a_{ij} & & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \cdots & \alpha a_{mj} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como podemos observar para multiplicar una matriz por un escalar lo que debemos hacer es multiplicar todos y cada uno de los componentes de la matriz por el escalar y así obtendremos la nueva matriz.

Ejemplo 4

Producto de un escalar por una matriz

Teniendo en cuenta la matriz A calcule 3A y -2A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 1x3 & 4x3 & 7x3 \\ 5x3 & 1x3 & -2x3 \\ -1x3 & 3x3 & 0x3 \end{bmatrix} \rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 21 \\ 15 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2x1 & -2x4 & -2x7 \\ -2x5 & -2x1 & -2x(-2) \\ -2x(-1) & -2x3 & -2x0 \end{bmatrix} \rightarrow -2A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -14 \\ -10 & -2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

La suma, resta y el producto por un escalar de matrices cumple ciertas propiedades que se enuncian en el siguiente teorema.

Sean A, B y C tres matrices de tamaño m x n y α y β escalares, entonces se cumple que:

1	A + 0 = A	Propiedad modulativa de la suma
2	0 x A = 0	Propiedad anulativa de la multiplicación
3	A + B = B + A	Propiedad conmutativa de la suma de matrices
4	(A + B) + C = A + (B + C)	Propiedad asociativa de la suma de matrices
5	α (A + B) = αA + αB	Propiedad distributiva para la multiplicación por un escalar
6	1 x A = A	Propiedad modulativa de la multiplicación por un escalar
7	(α + β) A = αA + βA	Propiedad distributiva de la suma de escalares

Tabla 1. Propiedades de la suma de matrices
Fuente: propia

En el numeral 1, el cero denota la matriz nula, lo cual nos indica que al sumar cualquier matriz con la matriz nula se obtiene la misma matriz original. En el numeral 2, el cero que se encuentra antes del igual representa el escalar cero, mientras que el cero que se encuentra después del igual representa la matriz nula, lo que nos indica que al multiplicar cero por cualquier matriz el resultado siempre será la matriz nula.

Realizaremos la demostración de las propiedades 1 y 2, las otras se sugieren al estudiante como ejercicio.

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Demuestre que A + 0 = A:

Como el cero representa la matriz nula procedemos de la siguiente manera:

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \cdots & a_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+0 & a_{m2}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Ahora demostraremos que 0 X A = 0

En este caso el 0 es un número escalar por lo que nos queda:

$$0 \; x \; A = \begin{bmatrix} a_{11}(0) & a_{12}(0) & \cdots & a_{1n}(0) \\ a_{21}(0) & a_{22}(0) & \cdots & a_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(0) & a_{m2}(0) & \cdots & a_{mn}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Producto entre matrices: si se tiene una matriz A de tamaño **m x p** y una segunda matriz B de tamaño **p x n**, el producto entre estas dos matrices, AB dará como resultado una matriz de tamaño **m x n** que tendrá la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (a_{11})(b_{11}) + (a_{12})(b_{21}) + (a_{13})(b_{31}) & (a_{11})(b_{12}) + (a_{12})(b_{22}) + (a_{13})(b_{32}) \\ (a_{21})(b_{11}) + (a_{22})(b_{21}) + (a_{23})(b_{31}) & (a_{21})(b_{12}) + (a_{22})(b_{22}) + (a_{23})(b_{32}) \end{bmatrix}$$

Como se observa, la primera condición que se debe cumplir para que se pueda realizar el producto entre matrices es que el número de filas de matriz A sea igual al número de columnas de la matriz B.

Para obtener la primera componente del producto AB ab_{11} se multiplican los componentes de la primera fila de la matriz A con sus respectivos componentes de la primera columna de la matriz B y se suman los resultados. Para el componente ab_{12} se toman de nuevo las componentes de la primera fila de la matriz a y se multiplican por sus correspondientes componentes de la segunda columna de la matriz B y de nuevo se suman sus resultados.

Para el componente ab_{21} se multiplican los componentes de la segunda fila de la matriz A por sus correspondientes componentes de la primera columna en la matriz B y se suman sus resultados. Finalmente, para el componente ab_{22} se multiplican los componentes de la segunda fila de la matriz A por los correspondientes componentes de la segunda columna de la matriz B y se suman sus resultados.

Ejemplo 5

Multiplicación de matrices

Teniendo en cuenta las matrices A y B que se ilustran encuentre el producto entre matrices AB:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = [(2)(-1) + (3)(4) + (8)(1)\ (2)(0) + (3)(-2) + (8)(3)\ (10)(-1) + (5)(4) + (1)(1)\ (10)(0) + (5)(-2) + (1)(3)\ ]$$

$$AAB = \begin{bmatrix} (2)(-1) + (3)(4) + (8)(1) & (2)(0) + (3)(-2) + (8)(3) \\ (10)(-1) + (5)(4) + (1)(1) & (10)(0) + (5)(-2) + (1)(3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}$$

Instrucción

- Para reconocer si se apropió de los conceptos se propone el siguiente ejercicio teniendo en cuenta las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Desarrolle:

- 2A + 3B
- B - 4A
- AC
- 5BC

- Antes de continuar lo invitamos a explorar el recurso: galería, acerca de los tipos de matrices. Se encuentra disponible en la plataforma.

Determinantes

Definiciones y conceptos

Un determinante es una herramienta matemática que asigna un número real a una matriz cuadrada, es decir, que tenga el mismo número de filas y de columnas. El determinante se obtiene realizando la suma y resta de los productos elementales de la matriz (producto de sus diagonales). Existen diversas maneras de calcular el determinante de una matriz para lo cual es conveniente definir el determinante de una matriz de tamaño 2 x 2.

Para la matriz A definida como se ilustra:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se define el determinante de A como

$$|A| = (a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})$$

El determinante de una matriz lo notaremos en adelante con el nombre de la matriz dentro de un par de barras verticales, debemos tener especial cuidado de no confundir esta notación con la de valor absoluto.

Ejemplo 6

Calcule el determinante para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (4)(7) - (5)(3) = 28 - 15 = 13$$

$$|B| = (5)(4) - (2)(-3) = 20 + 6 = 26$$

$$|C| = (-1)(5) - (3)(0) = -5 - 0 = -5$$

En el cálculo de los determinantes hay que tener especial cuidado con los signos.

Los determinantes cumplen ciertas propiedades que enunciamos a continuación (las demostraciones se omiten y se dejan como ejercicio opcional para el estudiante).

- El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta: $|A| = |A^t|$ $|A| = |A^t|$
- Al intercambiar dos filas o dos columnas de una matriz su determinante cambia de signo.
- Si multiplicamos todos los elementos de una fila o una columna por un número real el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.
- El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de dichas matrices.
- Si una matriz tiene todos los elementos nulos (0) en una fila o una columna su determinante es cero.
- Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales su determinante es cero.
- Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales su determinante es cero.

Instrucción

Para ampliar el tema lo invitamos a explorar en la plataforma el recurso videorresumen, acerca de las propiedades de los determinantes.

Realizaremos las demostraciones de las propiedades una y cinco para una matriz de tamaño 2x2 y 3x3.

Dada la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de las dos matrices y obtenemos:

$$|A| = |A^t|$$

$$(a_{11})(a_{22}) - (a_{12})(a_{21}) = (a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})$$

$$(a_{11})(a_{22}) - (a_{12})(a_{21}) = (a_{11})(a_{22}) - (a_{12})(a_{21})$$

Entonces obtenemos el mismo resultado en ambos lados de la igualdad lo que nos demuestra que la propiedad sí se verifica.

Ahora tomamos la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Calculamos: $|A|$ $|A|$

$$|A| = (a_{11})(0)(a_{33}) + (a_{12})(0)(a_{31}) + (a_{13})(0)(a_{32}) - ((a_{13})(0)(a_{31}) + (a_{12})(0)(a_{33}) + (a_{11})(0)(a_{32}))$$

$$|A| = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0 - 0 = 0$$

Matriz inversa

En este apartado introduciremos un concepto muy fuerte en el álgebra lineal, el de matriz inversa, determinaremos cómo calcularla a partir de la aplicación del concepto de matriz identidad y de la matriz ampliada y las transformaciones por filas para poder utilizarla posteriormente en la solución de diversos tipos de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales.

Una matriz A de tamaño n x n se denomina invertible o no singular si existe una matriz B de tamaño n x n tal que:

$$AB = BA = I$$

En este caso B se denomina la matriz inversa de A que se denota como A^{-1}. Si no existe la matriz B se dice que A es no invertible o singular. La matriz identidad I se puede definir como una matriz cuadrada en la cual todas los componentes de su diagonal son unos y el resto de sus componentes son ceros.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden 3:

Si se tiene una matriz A, su matriz ampliada consiste en adjuntar a la matriz A la matriz identidad I; se puede escribir como $(I)(I)$, por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz ampliada será:

$$(A|I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz inversa cumple con las siguientes propiedades.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(At)^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Para encontrar la inversa de una matriz existe un método práctico que se puede aplicar a cualquier matriz cuadrada y consiste en:

1. Se escribe la matriz aumentada: $(I)(I)$

2. Se utiliza la transformación por filas para convertir la matriz A en la matriz I, se debe tener cuidado de que todas las transformaciones que se realicen en A también se realicen en B.

3. Se decide si A es invertible:

- Si aparece la matriz I a la izquierda de la barra vertical entonces la matriz que se encuentra a la derecha de la barra es A^{-1}.
- Si en la transformación de A aparece una fila en la cual todos sus componentes son ceros, entonces A es no invertible.

Ejemplo

Ejemplo 7

Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz ampliada:

$$(A|I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora realizamos transformaciones elementales por filas para llevar a la matriz A a la forma de la matriz I:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -5f_1 + f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_2/2 = f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_3/(-4)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \quad -3/2f_3 + f_2 = f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \quad -f_3 + f_1 = f_1$$

Ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \quad -f_2 + f_1 = f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

Como en la parte izquierda de la barra aparece I entonces concluimos que:

$$A^{1} = \begin{bmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Queda como ejercicio al estudiante comprobar la respuesta verificando la igualdad $AA^{-1} = I$

Ejemplo 8

Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz ampliada y comenzamos las transformaciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -2f_1 + f_2 = f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_2 + f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como en la tercera fila se obtiene que todas las componentes son cero entonces concluimos que la matriz A no tiene inversa.

Instrucción

Ejercicio de seguimiento 3

Encuentre la inversa (si existe) de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de cofactores

Hasta el momento sabemos resolver el determinante de una matriz de tamaño 2 x 2 pero debemos desarrollar determinantes de matrices de mayor tamaño, comenzaremos por hallar el determinante de una matriz 3 x 3 y luego introduciremos un nuevo método para hallar el determinante de matrices de mayor tamaño.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A| = (a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32}) - (a_{31})(a_{22})(a_{13}) - (a_{32})(a_{23})(a_{11}) - (a_{33})(a_{21})(a_{11})$$

Este arreglo se tiene al duplicar las dos primeras filas o columnas de la matriz 3 x 3 y realizar el producto simple de sus diagonales:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9

Determinante de una matriz de orden 3x3

Encuentre el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de A será:

$$|A| = (4)(0)(0) + (6)(4)(2) + (-1)(5)(2) - (2)(0)(2) - (-1)(6)(0) - (4)(5)(4)$$

$$|A| = 0 + 48 - 10 - 0 - 0 - 80$$

$$|A| = 48 - 90$$

$$|A| = -42$$

Recuerde que el determinante, al ser un número real, puede ser negativo.

El método anterior es práctico para una matriz 3 x 3 pero para una matriz de mayor tamaño no se puede aplicar, entonces es conveniente utilizar el método de los cofactores. Este consiste en eliminar una fila y una columna de la matriz original para obtener una matriz de menor tamaño y así poder calcular el determinante. Ilustraremos el método por medio de un ejemplo y omitiremos la demostración.

Encuentre el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Al utilizar el método de los cofactores lo que hacemos es escoger una fila o una columna para eliminar y así conseguir matrices más pequeñas, la idea es llegar a matrices de tamaño 2 x 2 cuyo determinante es muy fácil de calcular. Es conveniente siempre seleccionar una fila o una columna que contenga la mayor cantidad de ceros ya que esto nos permitirá eliminar algunas matrices y reducirá nuestros cálculos, en este caso vamos a tomar los cofactores de la $fila_3$ (esta contiene dos 0), para esto nos paramos en el elemento a_{31} y tomamos los cofactores de esta fila.

$$|A| = a_{31}Cf_{31} - a_{32}Cf_{32} + a_{33}Cf_{33} - a_{34}Cf_{34}$$

El cofactor lo obtenemos al eliminar la fila y la columna que nos indica los subíndices del elemento y construir la matriz que queda. Los signos de los cofactores nos los dan igualmente los subíndices del elemento, si la suma de estos es par el signo es positivo y si la suma es impar el signo es negativo, entonces si $|A||A|$ nos queda:

$$|A| = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} - (-3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Los cofactores 2 y 3 se eliminan al multiplicarlo por cero y nos queda:

$$|A| = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De nuevo aplicamos cofactores para resolver las dos matrices 3 x 3:

$$|A| = 3\left(2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) + 3\left(2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$|A| = 3(2(9) - 2(-1)) + 3(2(8) - 2(10))$$

$$|A| = 3(18 + 2) + 3(16 - 20) = 48$$ $$|A| = 3(18 + 2) + 3(16 - 20) = 48$$

Instrucción

Para reconocer si ha apropiado los conceptos se propone el siguiente ejercicio.

Determinante de una matriz

Calcule el determinante de:

$$|A| = 3\left(2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) + 3\left(2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Matriz adjunta y su aplicación

Otro concepto que es importante conocer en álgebra lineal es el de matriz adjunta o conjugada de una matriz esta se define como la matriz traspuesta de la matriz de los, cofactores se denota por adjA y se puede encontrar fácilmente

Ejemplo 10

Matriz adjunta

Dada la matriz A calcule adjA:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comenzamos por calcular los cofactores de cada término para así poder obtener la matriz de cofactores:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Resolviendo cada uno de los cofactores obtenemos:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -6 \\ -5 & -15 & 13 \\ -8 & -15 & -24 \end{bmatrix}$$

Ahora encontramos la traspuesta de $[A_{ij}][A_{ij}]$ que es adjA.

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -6 \\ -5 & -15 & 13 \\ -8 & -15 & -24 \end{bmatrix}$$

Instrucción

- Para reforzar su aprendizaje por favor desarrolle el siguiente ejercicio: Encuentre la matriz adjunta de:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Antes de concluir lo invitamos a explorar el recurso de aprendizaje: demostración de roles y a desarrollar la actividad práctica.

De esta manera terminamos nuestro eje número uno, esperamos que la fundamentación y conceptualización adquirida pueda dar respuesta a la pregunta orientadora del eje ¿qué significado e importancia tienen las matrices, sus clases, las operaciones entre matrices, las matrices inversas y los determinantes, para la solución de problemas de la ingeniería y de otras áreas? Recuerda que estos temas son fundamentales para ser aplicados posteriormente en la resolución de situaciones propias de la ingeniería, así como de otras áreas del conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Antón, H. (1994). Introducción al álgebra lineal. Recuperado de https://bibliotecavirtualmatematicasunicaes.files.wordpress.com/2011/11/introduccic3b3n-al-c3a1lgebra-lineal-3ra-edicic3b3n-howard-anton1.pdf

Apóstol, T. (2001). Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Recuperado de https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf

Bru, R., y Climent, J. (2002). *Álgebra lineal*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Fernández, S., Martínez, A., y Paniagua, R. (1994). *Manual para la matemática universitaria: álgebra lineal*. Madrid, España: Editorial ESIC.

Florey, F. (1993). *Álgebra lineal y aplicaciones*. México D. F., México: Prentice Hall.

Grossman, S., y Flores, J. (2012). Algebra lineal. Recuperado de https://gerortiz.files.wordpress.com/2015/08/algebra_lineal_-_7ma_edicion_-_stanley_l-_grossman.pdf

Kolman, B., y Hill, D. (2006). Algebra lineal. Recuperado de https://algebralineal2010.files.wordpress.com/2012/09/algebra-lineal-kolman.pdf

Swokowski, E., y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México D. F., México: Cengage Learning Editores.

Tejero, L. (1992). *Álgebra lineal*. Madrid, España: Universidad Nacional a Distancia.

Universidad de Valencia. (s.f.). Introducción a la Matemática Económico-Empresarial. Recuperado de https://www.uv.es/~perezsa/docencia/material/IMEE/Matrices.pdf

Zill, D., y Dewar, J. (2000). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Recuperado de http://www.prepa6tecpan.com.mx/Archivos/Biblioteca/Jes%C3%BAs_David_Martinez_Abarca/4algebra-trigonometr%C3%ADa-y-geometr%C3%ADa-anal%C3%ADtica-3ra-Edici%C3%B3n-Dennis-G.-Zill.pdf

www.usanmarcos.ac.cr
San José, Costa Rica