

# CINEMÁTICA

AUTOR: EDWIN GERARDO ACUÑA ACUÑA

OCTUBRE: 2020



San Marcos

## Contenido

Introducción.....	3
Cinemática .....	4
Distancias y desplazamientos .....	4
Vector de posición, vector de desplazamiento y la escalar distancia.....	5
Vector velocidad, velocidad media y el escalare rapidez. ....	5
<b>¿Qué es la rapidez?</b> .....	<b>6</b>
Características de la rapidez.....	6
<b>Rapidez media</b> .....	<b>6</b>
<b>¿Qué es la velocidad?</b> .....	<b>6</b>
<b>Velocidad media</b> .....	<b>7</b>
Representación cartesiana de vectores (Son sistemas de medición).....	7
Determinación del desplazamiento y la velocidad a partir de la aceleración .....	10
Movimiento rectilíneo .....	10
<b>Magnitudes cinemáticas</b> .....	<b>10</b>
Posición.....	10
<b>Desplazamiento</b> .....	<b>10</b>
<b>Velocidad</b> .....	<b>11</b>
<b>Aceleración</b> .....	<b>12</b>
<b>Dada la velocidad del móvil hallar el desplazamiento</b> .....	<b>12</b>
<b>Dada la aceleración del móvil hallar el cambio de velocidad</b> .....	<b>13</b>
Movimiento con aceleración constante .....	14
Caída Libre .....	15
"Sistemas Tridimensionales" .....	18
Sistema de coordenadas tridimensional.....	18
<b>La regla de la mano derecha es</b> .....	<b>18</b>
Velocidad y aceleración en un plano .....	19
<b>Descripción</b> .....	<b>20</b>
<b>Sobre el bloque actúan</b> .....	<b>20</b>
<b>Sobre la cuña actúan</b> .....	<b>21</b>
Movimiento ideal de proyectil.....	22
<b>Disparo de proyectiles.</b> .....	<b>22</b>



Altura máxima y alcance de un proyectil.....	23
<b>Alcance.</b> ....	<b>23</b>
<b>Altura máxima</b> .....	<b>23</b>
Movimiento relativo .....	23
Conclusiones y recomendaciones.....	24
Bibliografía .....	24

## Introducción

La Cinemática es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, denominados, en sentido general, como partículas. Así, se puede definir la 'partícula' como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar sus dimensiones. En otras palabras, el desplazamiento o movimiento del cuerpo tiene mucha más importancia que sus dimensiones.

## Cinemática

La Cinemática es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, denominados, en sentido general, como partículas. Así, se puede definir la 'partícula' como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar sus dimensiones. En otras palabras, el desplazamiento o movimiento del cuerpo tiene mucha más importancia que sus dimensiones.

“Físicamente, y en cuanto a cuestiones de cinemática, podemos decir que una partícula o punto material puede ser cualquier objeto, pequeño o grande, del cual puede describirse su posición en el espacio mediante las coordenadas de un solo punto. La partícula o el punto material es un ejemplo de modelo físico. Un modelo es una representación idealizada de la realidad”. Tomado de (Días-Solorzano, 2020)

Como lo indica (Pérez, 2015, pág. 25)(Días-Solorzano, 2020) que señala que, “la cinemática es la parte de la mecánica que estudia cómo analizar y describir los movimientos de los objetos, pero sin tener en cuenta cuál es su origen. Se comenzará a definir conceptos básicos que nos permitirán describir cuantitativamente los movimientos.

Precisaremos conceptos de uso corriente, como distancia, desplazamiento, espacio recorrido, posición, velocidad, aceleración, etc., para que no se presten a confusiones cuando se utilicen en contextos científicos.” p.3. Se Verá cómo pueden

deducirse las leyes de movimiento a partir del conocimiento de la aceleración de un objeto.

Como ejemplo de aplicación, se analizará al movimiento de caída libre y determinaremos las leyes del movimiento de un objeto que cae. Partículas y modelos, cuando hablamos de un objeto en movimiento, a menudo bastará pensar en términos de una “partícula” que se mueve. Una partícula ideal es un punto que concentra toda la masa de un objeto.

Por ejemplo, una partícula puntual situada en el centro de la Tierra, y que contenga toda la masa de la Tierra, puede representar la Tierra en su movimiento alrededor del Sol.

Un punto puede representar también una pelota de baibole que se lanza al aire o un vehículo que se mueve por una carretera. Normalmente situamos el punto en el centro de gravedad del objeto, en el punto donde uno puede imaginarse que se concentra toda su masa. El concepto de partícula nos permite estudiar la cinemática de los objetos de manera más sencilla. En este módulo utilizaremos los términos partícula, cuerpo y objeto como sinónimos.

## Distancias y desplazamientos

Las diferencias entre valores de una magnitud e intervalos de la misma magnitud. Una forma de visualizarlo es con el caso del lanzamiento vertical de un objeto, que debemos ser cuidadosos acerca de qué magnitudes representamos en una gráfica y con qué objetivo.

## Vector de posición, vector de desplazamiento y la escalar distancia

En Física moderna, la posición, vector de posición ó vector posición de un cuerpo respecto a un sistema de referencia se define como el vector que une el lugar ocupado por el cuerpo con el origen del sistema de referencia. Su expresión, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x_i \vec{i} + y_j \vec{j} + z_k \vec{k}$$

donde:

- $\vec{r}$  es el vector de posición
- $x, y, z$ : Son las coordenadas del vector de posición
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ : Son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes OX, OY y OZ respectivamente.

La unidad de medida de la posición en el Sistema Internacional es el metro [m]. Como todo vector, el vector posición en Física cuenta con módulo, dirección y sentido. El módulo del vector posición es la distancia que separa al cuerpo del origen del sistema de referencia. Para calcularlo puedes utilizar la siguiente fórmula:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En el caso de aquellos problemas en los que sólo estés trabajando en dos dimensiones, puedes simplificar las fórmulas anteriores eliminando la componente z.

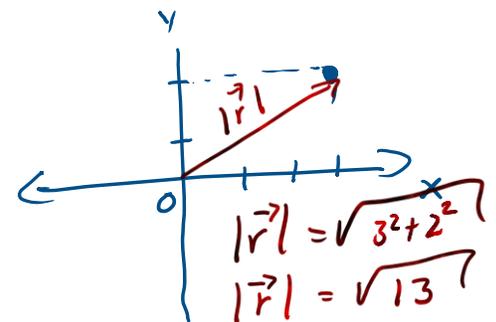
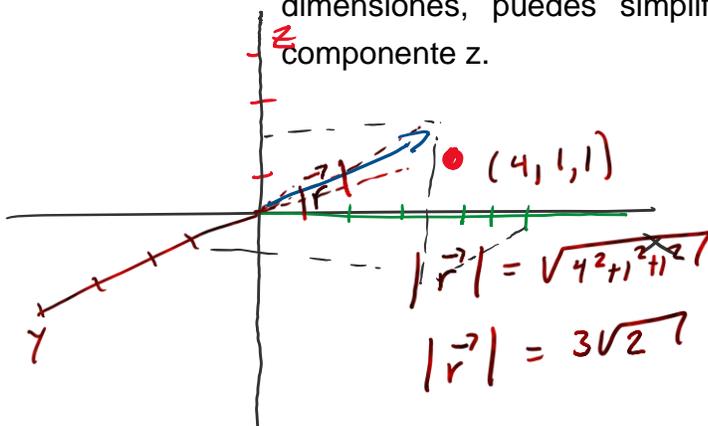


Figura 1. Posición de vectores.  
Fuente: propia.

## Vector velocidad, velocidad media y el escalar rapidez.

La velocidad y rapidez son términos utilizados como sinónimos para hacer referencia a la relación entre la distancia recorrida de un elemento y el tiempo empleado para cubrirla desde el primer punto al final.

Sin embargo, no en todos los casos velocidad y rapidez se refieren a lo mismo. En ámbitos más especializados, como la física, tienen ligeras

diferencias.

La rapidez como lo señala (Rex, 2011, pág. 22) la cual la refiere a la distancia que recorre un objeto en un tiempo determinado.

Ya que esta se calcula tomando la distancia recorrida y dividiéndola por el tiempo, la rapidez es una magnitud escalar.

En cambio, la velocidad se refiere al intervalo de tiempo que le toma a un objeto desplazarse hacia una dirección determinada. Al involucrar la dirección o sentido del movimiento, la velocidad es una magnitud vectorial.

### **¿Qué es la rapidez?**

La rapidez indica la relación entre la distancia recorrida por un objeto y el tiempo que este empleó para recorrerla. Como tal, puede medirse en metros, kilómetros, millas o nudos (en el medio acuático), por hora o por segundo.

Ya que la rapidez se expresa según la distancia y el tiempo, esta se caracteriza por ser una magnitud escalar, lo que significa que para describir la rapidez se utilizan solo unidades numéricas.

Como la rapidez implica el cubrir una distancia durante un intervalo de tiempo, esta solo puede dar un valor positivo.

Características de la rapidez

- Considera la distancia recorrida y el tiempo transcurrido de un objeto.
- Es una magnitud escalar.
- La rapidez media resulta de la división entre la distancia y un intervalo de tiempo.
- Siempre es positiva.

### **Rapidez media**

La rapidez media se refiere a la distancia total recorrida durante un tiempo determinado.

Por ejemplo, cuando un corredor de velocidad en atletismo establece un récord mundial de los 100 metros planos en 9,58 segundos, su rapidez media fue de 10,44 metros por segundo fue su velocidad.

### **¿Qué es la velocidad?**

La velocidad se expresa como la relación entre la distancia recorrida por un objeto y el tiempo que le toma recorrerlo hacia una dirección específica.

Básicamente, la velocidad se refiere al cambio posicional de un objeto, desde un punto de referencia inicial, hacia el lugar al cual este objeto se ha desplazado (el punto final del movimiento), y al tiempo que le ha tomado hacerlo. Tomado (Pérez, 2015, pág. 23) como idea no textual (Slisko, 2016) Al ser una magnitud que determina también la dirección en que se produce el desplazamiento, la velocidad es considerada una magnitud de carácter vectorial.

La velocidad, se mide en metros por segundo (m/s, según el Sistema Internacional de Unidades), por la dirección.

En este sentido, para que un objeto tenga una velocidad constante, debe desplazarse en una dirección constante durante determinada cantidad de

tiempo. Cualquier cambio en la dirección implicará variaciones en la velocidad. Tomado (Slisko, 2016, pág. 22) como referencia (Pérez, 2015).

### Características de la velocidad

- Se le considera como el cambio de posición de un objeto hacia una dirección específica.
- También es una magnitud vectorial.
- La velocidad media involucra el desplazamiento entre el intervalo de tiempo.
- Puede dar un valor positivo, negativo o incluso nulo (cero).

### Velocidad media

La velocidad media es aquel desplazamiento de un objeto desde una posición hacia otro punto en un tiempo determinado.

Como la velocidad toma en consideración el desplazamiento, si un objeto se encuentra en la misma posición luego de un intervalo de tiempo específico, su velocidad es nula (cero). De la misma forma, esta magnitud puede incluso llegar a ser negativa.

## Representación cartesiana de vectores (Son sistemas de medición)

Como lo indica (Días-Solorzano, 2020) que la Cinemática es la parte de la mecánica que se ocupa de describir el movimiento de partículas, objetos o grupos de objetos. El movimiento de una partícula puntual que describe una trayectoria cualquiera como la representada en negro en la siguiente figura. Por simplicidad, en la figura se ha representado una trayectoria plana, pero dicha trayectoria puede ser tridimensional.

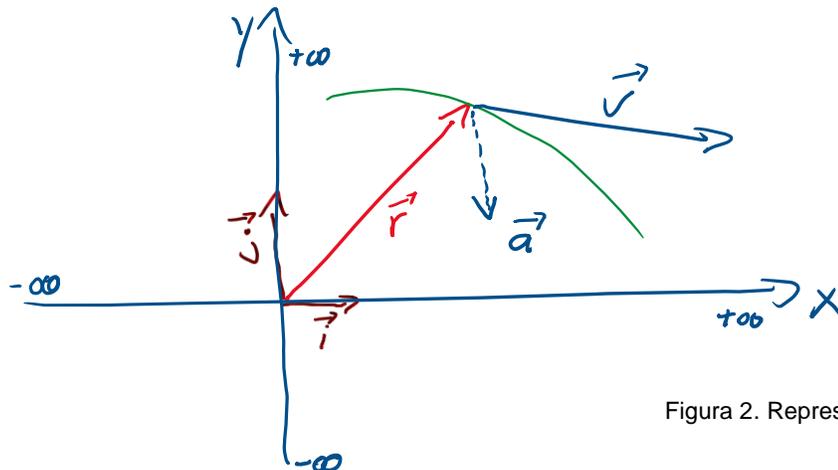


Figura 2. Representación cartesiana de vectores.  
Fuente: propia.

En la figura anterior se ha representado también un sistema de referencia en reposo en el cual el observador  $O$  se encuentra en el origen de unos ejes cartesianos. Dicho sistema de referencia se denomina inercial. El sentido positivo de los tres ejes cartesianos se indica respectivamente mediante los vectores unitarios  $i$ ,  $j$  y  $k$ . Describiremos el movimiento de la partícula con respecto a este sistema de referencia.

El movimiento de una partícula se describe mediante tres vectores: posición, velocidad y aceleración.

El vector de posición (representado en verde en la figura) va desde el origen del sistema de referencia hasta la posición de la partícula. En componentes cartesianas viene dado por:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ (m)}$$

Las componentes del vector de posición dependen del tiempo puesto que la partícula está en movimiento. Con el objeto de simplificar la notación con frecuencia omitiremos dicha dependencia en las expresiones de los vectores. El vector velocidad es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \text{ (m/s)}$$

Que también puede ser expresado:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \text{ (m/s)}$$

El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria de la partícula en cada punto de esta.

El vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

↳ metros entre segundos al cuadrado.

Que también puede ser expresado en la forma:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

El vector aceleración es la variación del vector velocidad a lo largo del tiempo. Por tanto, debe apuntar siempre hacia dentro de la trayectoria de la partícula, como se observa en la figura.

En el texto (Rex, 2011, pág. 32) establece que el vector aceleración puede ser expresado en función de sus proyecciones sobre un sistema de referencia que se mueve con la partícula y cuyos ejes son tangente y perpendicular (o normal) a la trayectoria de esta en cada punto. Dichas proyecciones se denominan componentes intrínsecas de la aceleración.

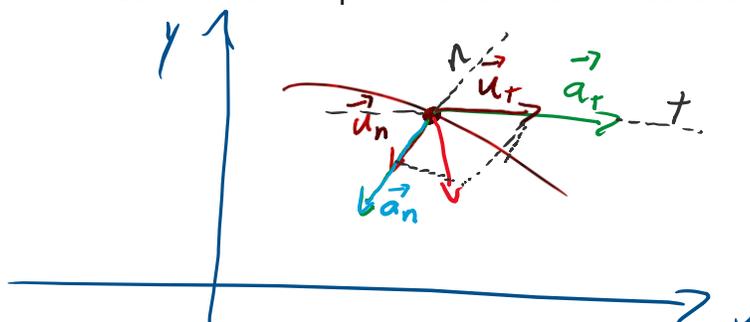




Figura 3. Posición de vectores acelerado.  
Fuente: propia.

En la figura superior se observa que el vector aceleración puede ser expresado como la suma de sus componentes intrínsecas, denominadas respectivamente aceleración tangencial y aceleración normal (o centrípeta):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

La aceleración tangencial viene dada por:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$$

Donde  $\vec{u}_t$  es un vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto que se determina dividiendo el vector velocidad por su módulo:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

La aceleración tangencial proporciona información sobre la variación del módulo del vector velocidad.

Por otra parte, la aceleración normal (o centrípeta) viene dada por:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

Donde  $\vec{u}_n$  es un vector unitario perpendicular a la trayectoria en cada punto y  $\rho$  es el radio de curvatura de la trayectoria.

La aceleración normal proporciona información sobre la variación de la dirección del vector velocidad. Si una partícula describe una trayectoria recta, el radio de curvatura de la misma es infinito y por tanto su aceleración normal es nula.

En el caso particular de una trayectoria circular, el módulo de la aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Consulta los distintos problemas que encontrarás en estas páginas para aprender a calcular las componentes intrínsecas de la aceleración.

## Determinación del desplazamiento y la velocidad a partir de la aceleración

### Movimiento rectilíneo

En esta página se comienza el estudio del movimiento rectilíneo de un plano. Se debe destacar el concepto de velocidad instantánea, y el cálculo del desplazamiento entre dos instantes cuando se conoce un registro de la velocidad del móvil entre dichos instantes. El movimiento de caída de los cuerpos como ejemplo de movimiento uniformemente acelerado.

#### Magnitudes cinemáticas

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

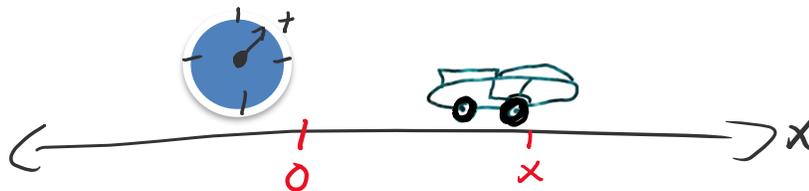


Figura 4. Magnitudes cinemáticas.  
Fuente: propia.

En la recta situamos un origen  $O$ , donde estará un observador que medirá la posición del móvil  $x$  en el instante  $t$ . Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

#### Posición

La posición  $x$  del móvil se puede relacionar con el tiempo  $t$  mediante una función  $x = f(t)$ .



Figura 5. Posición del móvil.  
Fuente: propia.

#### Desplazamiento

Supongamos ahora que en el tiempo  $t$ , el móvil se encuentra en posición  $x$ , más tarde, en el instante  $t'$  el móvil se encontrará en la posición  $x'$ . Decimos que el móvil se ha desplazado  $\Delta x = x' - x$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t' - t$ , medido desde el instante  $t$  al instante  $t'$ .

## Velocidad

La velocidad media entre los instantes  $t$  y  $t'$  está definida por

$$\langle v \rangle = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para determinar la velocidad en el instante  $t$ , debemos hacer el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tan pequeño como sea posible, en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Pero dicho límite, es la definición de derivada de  $x$  con respecto del tiempo  $t$ .

## Ejercicio

Una partícula se mueve a lo largo del eje  $X$ , de manera que su posición en cualquier instante  $t$  está dada por  $x = 5 \cdot t^2 + 1$ , donde  $x$  se expresa en metros y  $t$  en segundos.

Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre:

- 2 y 3 s.
- 2 y 2.1 s.
- 2 y 2.01 s.
- 2 y 2.001 s.
- Calcula la velocidad en el instante  $t = 2$  s.

En el instante $t=2$ s, $x=21$ m				
$t'$ (s)	$x'$ (m)	$\Delta x = x' - x$	$\Delta t = t' - t$	$\langle v \rangle$ m/s
3	46	25	1	25
2.1	23.05	2.05	0.1	20.5
2.01	21.2005	0.2005	0.01	20.05
2.001	21.020005	0.020005	0.001	20.005
...	...	...	...	...
			0	20

Tabla 1. Cálculo de la velocidad.  
Fuente: propia.

Como podemos apreciar en la tabla, cuando el intervalo  $\Delta t \rightarrow 0$ , la velocidad media tiende a 20 m/s. La velocidad en el instante  $t = 2$  s es una velocidad media calculada en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

Calculamos la velocidad en cualquier instante  $t$

- La posición del móvil en el instante  $t$  es  $x = 5t^2 + 1$
- La posición del móvil en el instante  $t + \Delta t$  es  $x' = 5(t + \Delta t)^2 + 1 = 5t^2 + 10t\Delta t + 5\Delta t^2 + 1$
- El desplazamiento es  $\Delta x = x' - x = 10t\Delta t + 5\Delta t^2$



- La velocidad media  $\langle v \rangle$  es  $\langle v \rangle = \frac{10t \cdot \Delta t + 5 \cdot \Delta t^2}{\Delta t} = 10 + 5 \cdot \Delta t$   $\langle v \rangle = 10 + 5 \cdot \Delta t$

La velocidad en el instante  $t$  es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + 5\Delta t) = 10 \text{ m/s} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(x) = 10 \text{ m/s}$$

La velocidad en un instante  $t$  se puede calcular directamente, hallando la derivada de la posición  $x$  respecto del tiempo.

$$x = 5t^2 + 1 \quad v = \frac{dx}{dt} = 10t \text{ m/s} \quad x = 5t^2 + 1 \quad v = \frac{dx}{dt} = 10t \text{ m/s}$$

En el instante  $t = 2 \text{ s}$ ,  $v = 20 \text{ m/s}$

### Aceleración

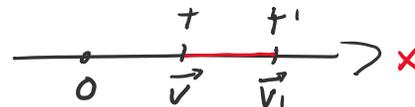


Figura 6. Aceleración de una partícula.  
Fuente: propia.

En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo.

Como lo establece en un ejemplo (Días-Solorzano, 2020, pág. 45) que supongamos que en un instante  $t$  la velocidad del móvil es  $v$ , y en el instante  $t'$  la velocidad del móvil es  $v'$ . Se denomina aceleración media entre los instantes  $t$  y  $t'$  al cociente entre el cambio de velocidad  $\Delta v = v' - v$  y el intervalo de tiempo en el que se ha tardado en efectuar dicho cambio,  $\Delta t = t' - t$ .  $\langle a \rangle = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$   $\langle a \rangle = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

La aceleración en el instante  $t$  es el límite de la aceleración media cuando el intervalo  $\Delta t$  tiende a cero, que es la definición de la derivada de  $v$ .

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(x) = \frac{dv}{dt}$$

### Ejemplo:

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta  $x = 2t^3 - 4t^2 + 5 \text{ m}$ . Hallar la expresión de

- La velocidad
- La aceleración del móvil en función del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t \text{ m/s} \quad a = \frac{dv}{dt} = 12 - 8 \text{ m/s}^2 \quad v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t \text{ m/s} \quad a = \frac{dv}{dt} = 12 - 8 \text{ m/s}^2$$

### Dada la velocidad del móvil hallar el desplazamiento

Si conocemos un registro de la velocidad podemos calcular el desplazamiento  $x - x_0$  del móvil entre los instantes  $t_0$  y  $t$ , mediante la integral definida.

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt \quad x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt$$

El producto  $v dt$  representa el desplazamiento del móvil entre los instantes  $t$  y  $t + dt$ , o en el intervalo  $dt$ . El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos infinitesimales entre los instantes  $t_0$  y  $t$ .



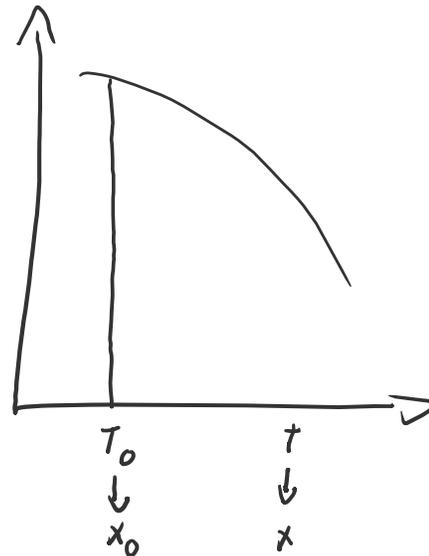


Figura 7. Desplazamiento.  
Fuente: propia.

En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento total del móvil entre los instantes  $t_0$  y  $t$ , el segmento en color azul marcado en la trayectoria recta. Se determina y se señala la posición  $x$  del móvil en el instante  $t$ , sumando la posición inicial  $x_0$  al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva  $v-t$  o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

**Ejemplo:**

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ley  $v = t^3 - 4t^2 + 5$  m/s. Si en el instante  $t_0 = 2$  s. está situado en  $x_0 = 4$  m del origen. Calcular la posición  $x$  del móvil en cualquier instante.

$$\begin{aligned}
 x - 4 &= \int 2t(t^3 - 4t^2 + 5) dt = \\
 &14t^4 - 43t^3 + 5t + 23 \quad mx - 4 = \\
 &\int 2t(t^3 - 4t^2 + 5) dt = \\
 &14t^4 - 43t^3 + 5t + 23 \quad m
 \end{aligned}$$

**Dada la aceleración del móvil hallar el cambio de velocidad**

Del mismo modo, que hemos calculado el desplazamiento del móvil entre los instantes  $t_0$  y  $t$ , a partir de un registro de la velocidad  $v$  en función del tiempo  $t$ , podemos calcular el cambio de velocidad  $v - v_0$  que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de un registro de la aceleración en función del tiempo.

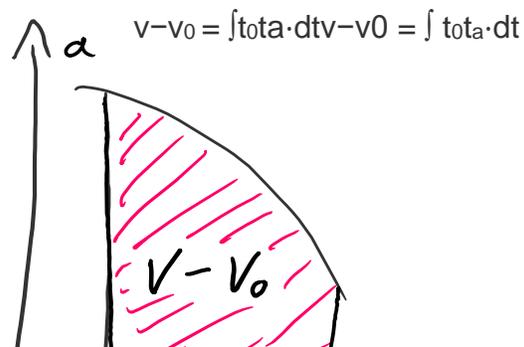


Figura 8. Aceleración del móvil.  
Fuente: propia.

En la figura, el cambio de velocidad  $v-v_0$  es el área bajo la curva  $a-t$ , o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad  $v-v_0$ , y el valor inicial  $v_0$  en el instante  $t_0$ , podemos calcular la velocidad  $v$  en el instante  $t$ .

**Ejemplo:**

La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta viene dada por la expresión.  $a=4-t^2$  m/s<sup>2</sup>. Sabiendo que en el instante  $t_0=3$  s, la velocidad del móvil vale  $v_0=2$  m/s. Determinar la expresión de la velocidad del móvil en cualquier instante

$$v-2 = \int_3^t (4-t^2) dt \Rightarrow v-2 = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1 \quad \text{m/s}$$

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento rectilíneo son

$$v = dx/dt \quad x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt = \int_{t_0}^t v dt \quad v - v_0 = \int_{t_0}^t a \cdot dt$$

### Movimiento con aceleración constante

En Física decimos que un cuerpo tiene aceleración cuando se produce un cambio del vector velocidad, ya sea en módulo o dirección. La aceleración se puede descomponer según el efecto que produce en la velocidad de la siguiente forma:

- Aceleración tangencial. Responsable de que cambie el módulo del vector velocidad
- Aceleración normal o centrípeta. Responsable de que cambie la dirección y/o sentido del vector velocidad.

Ambos conceptos se conocen como las componentes intrínsecas de la aceleración y sus valores nos pueden servir para clasificar los movimientos, tal y como veremos a continuación.

- Los movimientos en los que la aceleración normal es igual a 0 son movimientos rectilíneos y serán rectilíneos acelerados o rectilíneos uniformes dependiendo de su aceleración tangencial.
- Los movimientos en los que la aceleración normal es distinta de 0 son considerados curvilíneos o circulares en función de si el radio de curvatura  $\rho$  permanece o no constante. Los movimientos con un radio de curvatura

constante tienen por trayectoria una circunferencia y serán acelerados o no en función del valor de la aceleración tangencial  $a \rightarrow t$

## Caída Libre

Es importante el término de caída libre que es al movimiento que se debe únicamente a la influencia de la gravedad como lo indica (Slisko, 2016, pág. 23).

- Todos los cuerpos con este tipo de movimiento tienen una aceleración dirigida hacia abajo cuyo valor depende del lugar en el que se encuentren. En la Tierra este valor es de aproximadamente  $9.8 \text{ m/s}^2$ , es decir que los cuerpos dejados en caída libre aumentan su velocidad (hacia abajo) en  $9.8 \text{ m/s}$  cada segundo.
- En la caída libre no se tiene en cuenta la resistencia del aire. Como lo indica (Días-Solorzano, 2020, pág. 123) que la aceleración a la que se ve sometido un cuerpo en caída libre es tan importante en la Física que recibe el nombre especial de aceleración de la gravedad y se representa mediante la letra  $g$ .

Lugar	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$
Mercurio	2.8
Venus	8.9
Tierra	9.8
Marte	3.7
Júpiter	22.9
Saturno	9.1
Urano	7.8
Neptuno	11.0
Luna	1.6

Tabla 2. Gravedad de algunos planetas.  
Fuente: propia.

Se a dicho antes que la aceleración de un cuerpo en caída libre dependía del lugar en el que se encontrara.

Para hacer más cómodos los cálculos de clase solemos utilizar para la aceleración de la gravedad en la Tierra el valor aproximado de  $10 \text{ m/s}^2$  en lugar de  $9.8 \text{ m/s}^2$ , que sería más correcto.

tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
posición (m)	0	-5	-20	-45	-80	-125	-180	-245

Tabla 3. Algunos resultados de la aceleración.  
Fuente: propia.



Ahora es un buen momento para repasar las páginas que se refieren a la interpretación de las gráficas e-t y v-t y recordar lo que hemos aprendido sobre ellas.

Ya hemos visto que las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo pueden proporcionarnos mucha información sobre las características de un movimiento.

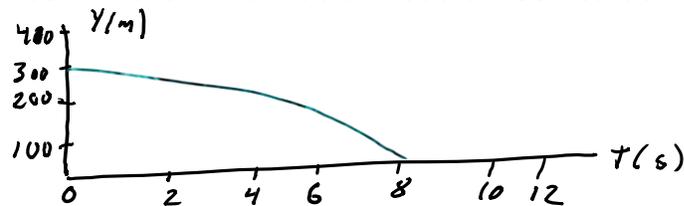


Figura 9. Caída libre.  
Fuente: propia.

Para la caída libre, la gráfica posición tiempo tiene la siguiente apariencia: Recuerda que en las gráficas posición-tiempo, una curva indicaba la existencia de aceleración.

La pendiente cada vez más negativa nos indica que la velocidad del cuerpo es cada vez más negativa, es decir cada vez mayor pero dirigida hacia abajo. Esto significa que el movimiento se va haciendo más rápido a medida que transcurre el tiempo.

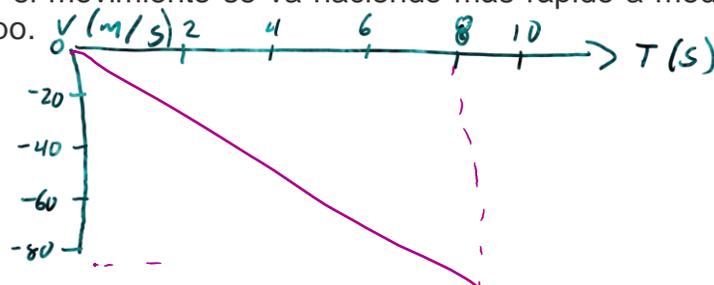


Figura 10. Movimiento escalar.  
Fuente: propia.

Observa la gráfica v-t de la derecha que corresponde a un movimiento de caída libre.

Su forma recta nos indica que la aceleración es constante, es decir que la variación de la velocidad en intervalos regulares de tiempo es constante.

<b>tiempo (s)</b>	0	1	2	3	4	5
<b>velocidad (m/s)</b>	0	-9.8	-19.6	-29.4	-39.2	-49

Tabla 4. movimiento escalar.  
Fuente: propia.

La pendiente negativa nos indica que la aceleración es negativa. En la tabla anterior podemos ver que la variación de la velocidad a intervalos de un segundo es siempre la misma (-9.8 m/s). Esto quiere decir que la aceleración para cualquiera de los intervalos de tiempo es:

$$g = -9.8 \text{ m/s} / 1\text{s} = -9.8 \text{ m/s/s} = -9.8 \text{ m/s}^2$$

## Ecuaciones para la caída libre

Recuerda las ecuaciones generales del movimiento:

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

Podemos adaptar estas ecuaciones para el movimiento de caída libre. Si suponemos que dejamos caer un cuerpo (en lugar de lanzarlo), entonces su velocidad inicial será cero y por tanto el primer sumando de cada una de las ecuaciones anteriores también será cero, y podemos eliminarlos:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v_f = a \cdot t$$

Por otro lado, en una caída libre la posición que ocupa el cuerpo en un instante es precisamente su altura  $h$  en ese momento.

Como hemos quedado en llamar  $g$  a la aceleración que experimenta un cuerpo en caída libre, podemos expresar las ecuaciones así:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_f = g \cdot t$$



## Sistemas de coordenadas tridimensionales

"Sistemas Tridimensionales"

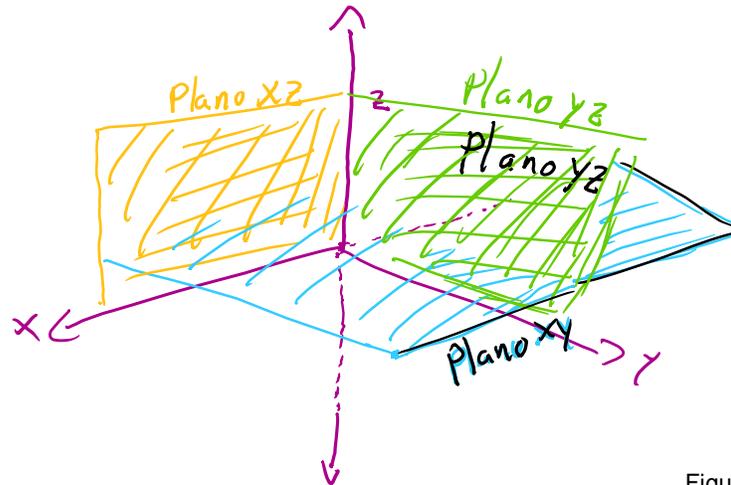


Figura 11. Planos tridimensionales.  
Fuente: propia.

Un objeto es tridimensional si tiene tres dimensiones. Es decir, cada uno de sus puntos puede ser localizado especificando tres números dentro de un cierto rango. Como lo establece (Pérez, 2015, pág. 22) que el sistema tridimensional más usado en física (clásica) es el espacio: una dimensión para el ancho, otra para la altura y otro para la profundidad. Para representarlo basta con el gráfico de ejes cartesianos X, Y, Z. En las imágenes se puede observar el gráfico con el que se representan los sistemas tridimensionales.

### Sistema de coordenadas tridimensional

Un sistema cartesiano tridimensional está compuesto por tres planos perpendiculares entre sí, los cuales se interceptan en los ejes coordenados, los que se denominan ejes Ox, Oy y Oz. Las coordenadas de un punto P son (x, y, z). La distancia signada como x, y y z se llaman abscisa, ordenada y cota respectivamente. Los planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes.

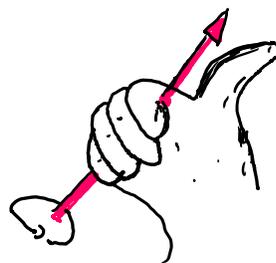


Figura 12. Determinar planos cartesianos.  
Fuente: propia.

**La regla de la mano derecha es:** se orientan los dedos de la mano derecha,

excepto el pulgar, en el sentido positivo del eje OX y se los envuelve o gira hacia el sentido positivo del eje OY, levantando recto el pulgar se tendrá el sentido positivo del eje OZ.

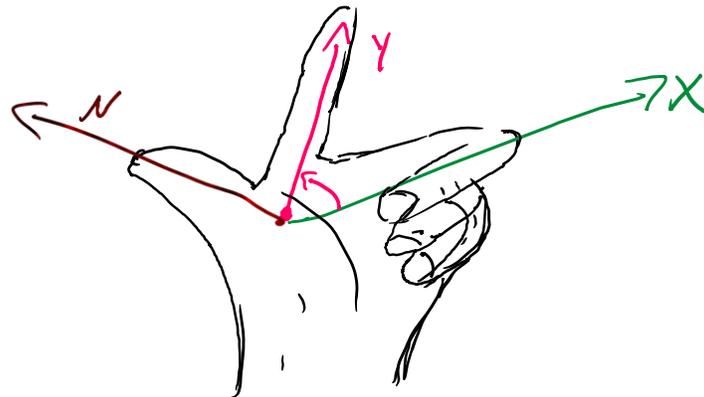


Figura 13. Regla de la mano derecha.  
Fuente: propia.

También se puede emplear la regla de la mano izquierda, como puede verse, los dedos medio, índice y pulgar se colocan en direcciones perpendiculares entre sí, se nombran los ejes a partir del dedo medio en orden alfabético. Esta es la forma mas usual de representar los sentidos positivos de los ejes coordenados

## Velocidad y aceleración en un plano

El estudio del movimiento de un cuerpo que desliza a lo largo de un plano inclinado que, a su vez, se mueve sin fricción sobre una superficie horizontal. Este es un problema clásico en un curso de Física General

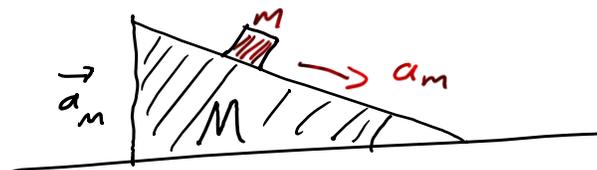


Figura 14. Aceleración en un plano.  
Fuente: propia.

El plano inclinado es una cuña de masa  $M$ , que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Un cuerpo de masa  $m$  desliza sobre el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento entre las dos superficies en contacto es  $\mu$ .

- La aceleración del bloque respecto de la cuña es  $a_m$ , su dirección es paralela al plano inclinado
- La aceleración de la cuña respecto de Tierra es  $a_M$ , en la dirección horizontal. Suponemos inicialmente que  $a_M$  tiene el sentido hacia la derecha (positivo). Como veremos, la conservación del momento lineal o las ecuaciones del movimiento nos darán el sentido correcto, hacia la izquierda (negativo).

### Descripción

En la figura, se muestra las fuerzas sobre cada uno de los dos cuerpos y las aceleraciones de estos.

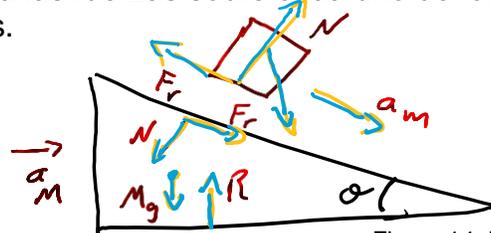


Figura 14. Fuerza de la aceleración.  
Fuente: propia.

### Sobre el bloque actúan

- El peso  $mg$
- La reacción  $N$  del plano inclinado
- La fuerza de rozamiento,  $F_r$  que se opone a su movimiento hacia abajo a lo largo del plano inclinado

Las ecuaciones del movimiento del bloque son

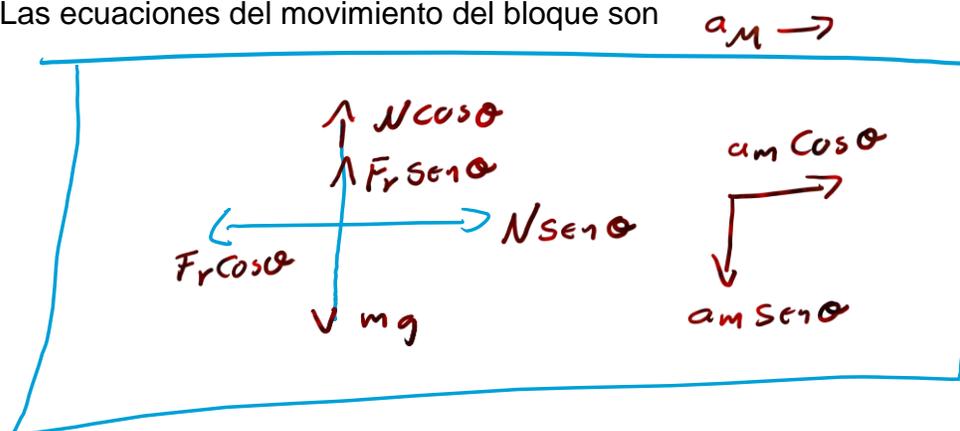


Figura 14. Ecuaciones en un plano del movimiento.  
Fuente: propia.

1. A lo largo del eje horizontal, la aceleración del bloque respecto de Tierra es  $(a_m \cdot \cos\theta + a_M)$   
$$N \cdot \sin\theta - F_r \cdot \cos\theta = m(a_m \cdot \cos\theta + a_M)$$
2. A lo largo del eje vertical, la aceleración del bloque respecto de Tierra es  $a_m \cdot \sin\theta$   
$$mg - N \cdot \cos\theta - F_r \cdot \sin\theta = m \cdot a_m \cdot \sin\theta$$
3. Si  $\mu$  es el coeficiente de la fuerza de rozamiento  
$$F_r = \mu \cdot N$$

### Sobre la cuña actúan

- El peso  $Mg$  en su centro de masas
- Por la tercera ley de Newton, las fuerzas que ejerce la cuña sobre el bloque son iguales y de sentido contrario a las que ejerce el bloque sobre la cuña.
- La reacción  $R$  del plano horizontal a lo largo del cual desliza la cuña sin rozamiento.

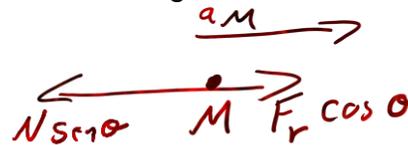


Figura 15. Rozamiento.  
Fuente: propia.

A lo largo del eje horizontal, la ecuación del movimiento es

$$F_r \cos \theta - N \cdot \sin \theta = M \cdot a_M$$

A lo largo de la dirección vertical, la cuña está en equilibrio.

Sumando la primera y tercera ecuación, obtenemos la relación entre las aceleraciones  $a_m$  y  $a_M$ .

$$m(a_m \cdot \cos \theta + a_M) + M \cdot a_M = 0$$

$$a_M = \frac{m a_m \cos \theta}{m + M}$$

La aceleración de la cuña  $a_M$  es de sentido contrario al señalado en las figuras.

Despejamos del sistema de ecuaciones la aceleración  $a_m$  del bloque respecto de la cuña y la aceleración de la cuña  $a_M$  respecto de Tierra.

$$a_m = \frac{(m + M)g(\tan \theta - \mu) \cos \theta}{m + M - m(1 + \mu \tan \theta) \cos^2 \theta}$$

$$a_M = \frac{mg(\tan \theta - \mu) \cos^2 \theta}{m + M - m(1 + \mu \tan \theta) \cos^2 \theta}$$

## Movimiento ideal de proyectil

La composición de un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado resulta un movimiento cuya trayectoria es una parábola.

- Un MRU horizontal de velocidad  $v_x$  constante.
- Un MRUA vertical con velocidad inicial  $v_{oy}$  hacia arriba.

Este movimiento está estudiado desde la antigüedad. Se recoge en los libros más antiguos de balística para aumentar la precisión en el tiro de un proyectil. Denominamos proyectil a todo cuerpo que una vez lanzado se mueve solo bajo la aceleración de la gravedad.



Figura 16. Lanzamiento de proyectil.  
Fuente: imagen 3D word - propia.

### Disparo de proyectiles.

Consideremos un cañón que dispara un obús desde el suelo ( $y_0 = 0$ ) con cierto ángulo  $\theta$  menor de  $90^\circ$  con la horizontal.

Las ecuaciones del movimiento, resultado de la composición de un movimiento uniforme a lo largo del eje X, y de un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0 & v_x &= v_0 \cdot \cos \theta_0 & x &= v_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot t \\
 a_y &= -g & v_y &= v_0 \cdot \sin \theta_0 - g \cdot t & y &= v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2
 \end{aligned}$$

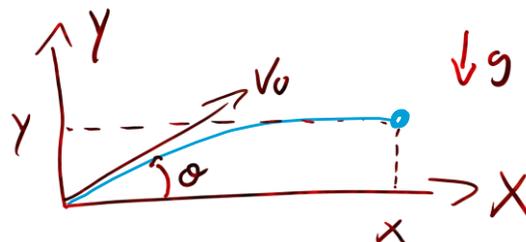


Figura 16. Disparos de proyectiles.  
Fuente: propia.

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son

$$x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Eliminado el tiempo  $t$ , obtenemos la ecuación de la trayectoria (ecuación de una parábola)

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

## Altura máxima y alcance de un proyectil

### Alcance.

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para  $y=0$ .

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Su valor máximo se obtiene para un ángulo  $\theta = 45^\circ$ , teniendo el mismo valor para  $\theta = 45 + a$ , que para  $\theta = 45 - a$ . Por ejemplo, tienen el mismo alcance los proyectiles disparados con ángulos de tiro de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , ya que  $\sin(2 \cdot 30) = \sin(2 \cdot 60)$ .

### Altura máxima

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con  $v_y = 0$ .

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo  $\theta = 90^\circ$ .

## Movimiento relativo

El movimiento es siempre relativo. Esto es, depende siempre del observador, o, mejor dicho, del sistema de referencia escogido por éste.

Con el Modellus se puede estudiar la trayectoria de una partícula (en nuestro caso, una bola) desde dos sistemas de referencia distintos.

En primer lugar, se han escogido un sistema en reposo y otro cuyos ejes giran con una determinada velocidad angular que permanece constante:

- Éstas son las fórmulas correspondientes a un eje que gira, con sus coordenadas seno y coseno para conseguir así el movimiento circular.

$$x_{G1} = 100 \cdot \cos(w \cdot t)$$

$$y_{G1} = 100 \cdot \sin(w \cdot t)$$

- Para conseguir el sistema de coordenadas que gire, nos hace falta ahora otro eje, perpendicular al anterior y que gire con la misma  $w$ .

Esto es, necesitamos una fase inicial de  $90$  grados.

$$x_{G2} = 100 \cdot \cos(w \cdot t + 90)$$

$$y_{G2} = 100 \cdot \sin(w \cdot t + 90)$$



- Necesitamos, por supuesto las fórmulas que caractericen el movimiento de la bola. En nuestro caso, un movimiento rectilíneo y uniforme.

$$x = 50$$

$$y = v \cdot t$$

- Por último, añadimos las expresiones que nos permiten comprobar el movimiento que llevará la bola con respecto al sistema giratorio. Es decir, el cambio de coordenadas del sistema inercial al giratorio.

$$x_G = x \cdot \cos(\omega \cdot t) + y \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y_G = -x \cdot \sin(\omega \cdot t) + y \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

## Conclusiones y recomendaciones

1. Los elementos básicos visto en este apartado de la cinemática son el espacio de elementos, el tiempo de movimiento y un móvil en el espacio.
2. Se analizó la cinemática que estudia los movimientos de los cuerpos independientemente de las causas que lo producen en un espacio.
3. Se tiene que tomar en cuenta que la información viaja en progresión geométrica, se concluye entonces que todo lo que nos rodea en relación al tema de cinemática, enriquece y da múltiples matices dentro de un espacio, ángulos formados en sus figuras y formas de interpretar el fenómeno de la cinemática de traslación de elementos; más todos que convergen en la estructura establecida que vuelve a sus bases y se potencia cuando se la reconoce dentro de la aplicación del cálculo matemático para demostrar su existencia.

## Bibliografía

Bueche, F. J. (2009). *Física General. Décima edición*. México D.F: McGraw-Hill Companies.

Días-Solorzano. (08 de 11 de 2020). <http://www.scielo.org.mx>. Obtenido de

<http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v56n2/v56n2a5.pdf>:

<http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v56n2/v56n2a5.pdf>

Pérez, H. .. (03 de 11 de 2015). *Ebookcentral*. Obtenido de <https://ebookcentral-proquest-com.proxy.bidig.areandina.edu.co/lib/biblioteca-fuaasp/reader.action?docID=4569671&query=F%C3%ADsica>

Rex, A. F. (2011). *Fundamento de Física*. Madrid. España: PEARSON.

Slisko, J. (03 de 11 de 2016). *Física I*. Obtenido de [Ebooks7-24.com.proxy.bidig.areandina.edu.co:2048/onlinepdfjs/view.aspx](http://www.ebooks7-24.com.proxy.bidig.areandina.edu.co:2048/onlinepdfjs/view.aspx)

<http://www.ebooks7-24.com.proxy.bidig.areandina.edu.co:2048/onlinepdfjs/view.aspx>

<http://www.ebooks7-24.com.proxy.bidig.areandina.edu.co:2048/onlinepdfjs/view.aspx>



[www.usanmarcos.ac.cr](http://www.usanmarcos.ac.cr)

San José, Costa Rica