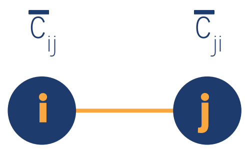
MODELO DE REDES

Algoritmo de flujo máximo

El objetivo del algoritmo de flujo máximo es determinar la capacidad de flujo máximo de la red.



A continuación, veremos en la siguiente figura los FLUJOS DE ARCOS.
La dirección de los flujos es bidireccional y se explica como sigue:

C_{ij} de i --> j y C_{ji} de j-->i

Según Taha (2012):

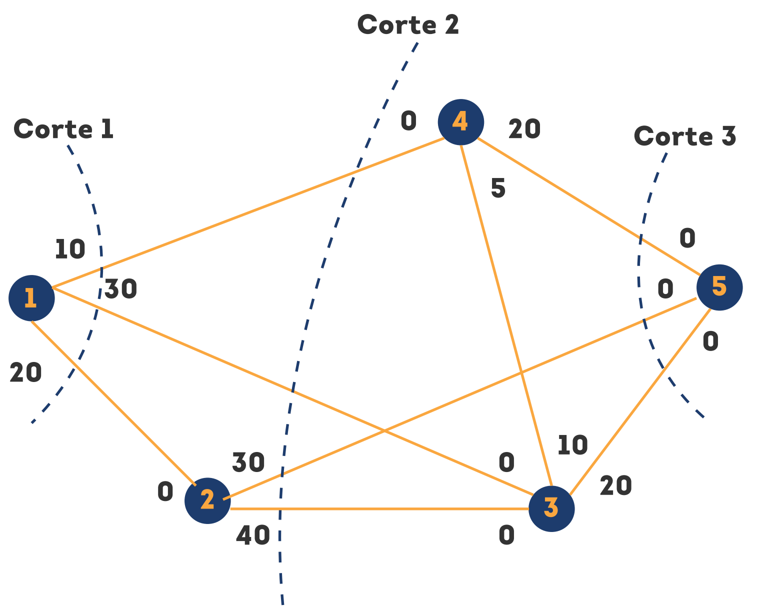
Para el arco (i,j), la notación ($\overline{C}_{ij}$,$\overline{C}_{ji}$) proporciona las capacidades de flujo en las dos direcciones i-->j y j-->i. Para eliminar la ambiguedad, colocamos a $\overline{C}_{ij}$ junto al nodo i y a $\overline{C}_{ji}$ junto al nodo j.

De acuerdo con Taha (2012):

> "Un corte define un conjunto de arcos cuya eliminación de la red interrumpe el flujo entre los nodos fuente y destino. La capacidad de corte es igual a la suma de las capacidades de su conjunto de arcos. Entre todos los cortes posibles en la red, el corte con la capacidad mínima es el cuello de botella que determina el flujo máximo en la red". (Taha, 2012, pág. 235).

UN CORTE DEFINE UN CONJUNTO DE ARCOS CUYA ELIMINACIÓN DE LA RED INTERRUMPE EL FLUJO ENTRE LOS NODOS FUENTE Y DESTINO.

Miremos ahora la siguiente figura con ejemplos de cortes de redes de flujo.



Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Las capacidades bidireccionales se muestran en los arcos respectivos tal como lo mencionamos anteriormente.

Revisemos el caso del límite de flujo para el arco (3,4), el cual es de 10 unidades de 3 a 4, y de 5 unidades de 4 a 3.

En la figura, se pueden ver tres cortes con las siguientes capacidades:

CORTE	ARCOS ASOCIADOS	CAPACIDAD
1	(1,2), (1,3), (1,4)	20 + 30 + 10 = 60
2	(1,3), (1,4), (2,3), (2,5)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
3	(2,5), (3,5), (4,5)	30 + 20 + 20 = 70

Tomado de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

En relación con lo primordial de la información de los tres cortes, el flujo máximo en la red no puede exceder las 60 unidades.

Para establecer el flujo máximo, es necesario enumerar todos los cortes. Es una tarea difícil para la red general; por eso, es imperativa la necesidad de un algoritmo eficiente.

PARA ESTABLECER EL FLUJO MÁXIMO, ES NECESARIO ENUMERAR TODOS LOS CORTES.

Según Taha (2012), este algoritmo se basa en el hallazgo de rutas de avance con flujo positivo entre los nodos origen y destino. Cada ruta asigna una parte de o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red

Así mismo, de acuerdo con Taha (2012), considere el siguiente algoritmo:

Considere el arco (i, j) con las capacidades bidireccionales (de diseño) (C_{ij}, C_{ji}). Como algunas partes de estas capacidades se destinan al flujo en el arco, los residuos (capacidades no utilizadas, o flujo remanente) del arco se actualizan. Utilizamos la notación (c_{ij}, c_{ji}) para representar los residuos.

Para un nodo j que recibe flujo del nodo i, anexamos la etiqueta [a_j,i] donde a_j es el flujo del nodo i al nodo j.

Paso 1. Para todos los arcos, iguales la capacidad residual a la capacidad de diseño, esto es $(c_{ij,}\ c_{ji}) = (C_{ij}, C_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$ no determinado, y etiquete el nodo fuente con $[\infty, -]$. Designe $i = 1$, y continúe con el paso 2.

Paso 2. Determine Si, el conjunto de nodos no etiquetados j al que se puede llegar directamente desde i por medio de arcos con residuos positivos, es decir, $c_{ij} > 0$ para todas las j € Si). Si $S_i \neq \emptyset$, continúe con el paso 3. De lo contrario, una ruta parcial termina en el nodo i. Continúe con el paso 4.

Paso 3. Determine k € Si de modo que $c_{ik} = \underset{j_e S_i}{\text{más}} \{c_{ij}\}$

Designe $a_k = c_{ik}$ y etiquete el nodo k con $[a_{k,}\ i]$. Si k = n, el nodo sumidero ha sido etiquetado, y se ha encontrado una ruta de avance, continúe con el paso 5. De lo contrario, designe i = k, y vaya al paso 2.

Paso 4. (Retroceso). Si i = 1, no es posible avanzar; continúe con el paso 6. De lo contrario, sea r el nodo (en la ruta parcial) que se etiquetó inmediatamente antes del nodo actual i, y elimine i del conjunto de nodos adyacentes a r. Designe i = r, y regrese al paso 2.

Paso 5. (Determinación de los residuos). Defina los nodos de la ruta de avance pésima del nodo 1 al nodo n como $N_p = (1, k_1, k_2, \dots, n)$. Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula como: $f_p = \text{mín}\ \{a_1, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_n\}$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de avance se reduce en fp en la dirección del flujo y se incrementa en fp en la dirección inversa; es decir, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a **(a)** $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo es de i a j

(b) $(c_{ij} + f_p, c_n + f_p)$, si el flujo es de j a i

Restaure los nodos que se eliminaron en el paso 4. Designe i = 1, y regrese al paso 2.

Paso 6. (Solución).

(a) Dado que se determinaron m rutas de avance, el flujo máximo en la red es:

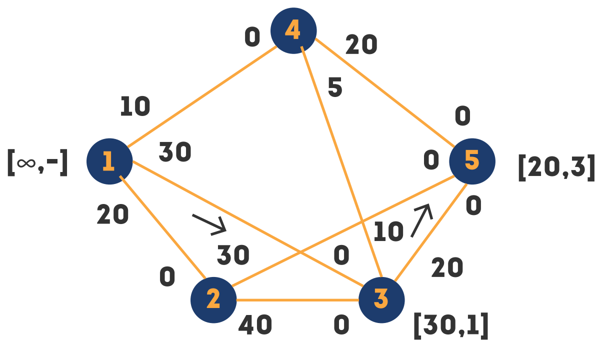
$$F = f_1 + f_2 + . . . + f_m$$

(b) Utilizando las capacidades de diseño (iniciales) y los residuos finales del arco (i,j), (C_{ij}, C_{ji}), y (c_{ij}, c_{ji}), respectivamente, el flujo óptimo en el arco (i,j) se determina calculando:

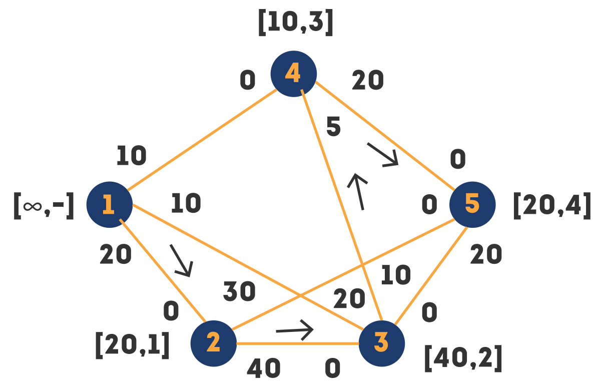
$$(\alpha,\beta) = (\overline{C}_{ij} - c_{ij}, \overline{C}_{ji} - c_{ji})$$

Si $\alpha\alpha$ > 0, el flujo óptimo de i a j es a. Por otra parte, si $\alpha\beta$ >0, el flujo óptimo de j a i es β α(Es imposible que α αy β sean positivos al mismo tiempo) (pág. 236).

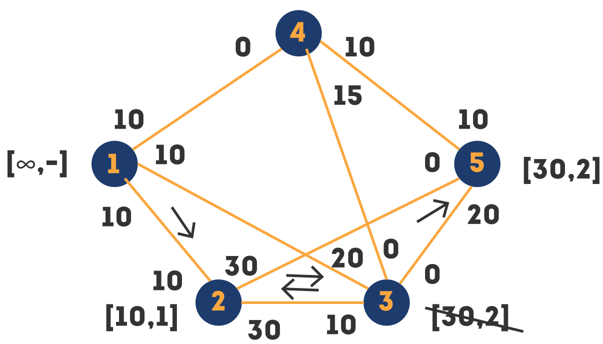
Las figuras siguientes proporcionan un resumen gráfico de las iteraciones del algoritmo de flujo máximo.



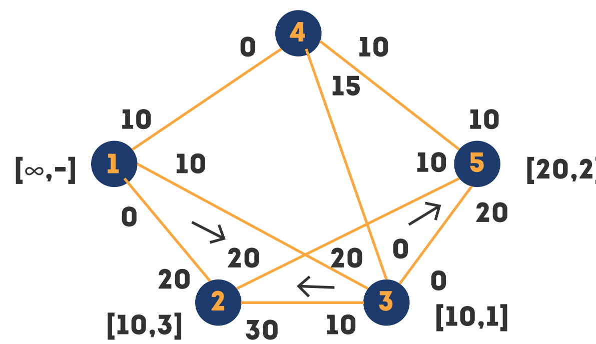
(Iteración 1) $f_1 = 20$



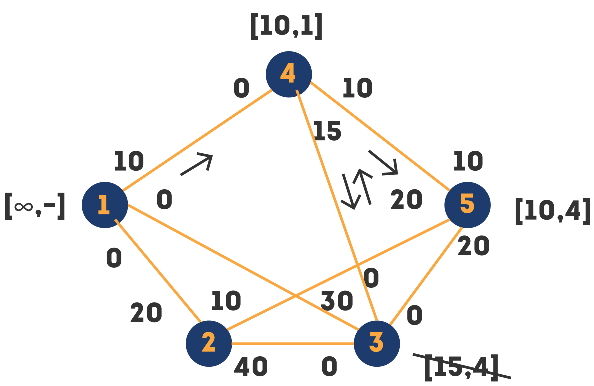
(Iteración 2) $f_2 = 10$



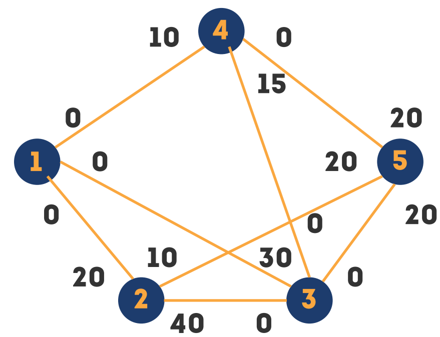
(Iteración 3) $f_3 = 10$



(Iteración 4) $f_4 = 10$



(Iteración 5) $f_5 = 10$



(Iteración 6) No hay ruta de avance

Tomadas de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Es de utilidad comparar la descripción de las iteraciones con el resumen gráfico.

Taja (2012) nos explica estas iteraciones:

"Iteración 1

Iguale los residuos iniciales (c_{ij},c_{ji}) a las capacidades iniciales (C_{ij}, C_{ji}).

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$ y etiquete el nodo 1 con [∞, 2]. Establezca i = 1.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$ ($\neq \emptyset$).

Paso 3. k = 3, porque c_{13} = máx [c_{12}, c_{13}, c_{14}] = máx [20, 30,10]. Establezca $a_3 = c_{13} = 30$ y etiquete el nodo 3 con [30,1]. Establezca i = 3 y repita el paso 2.

Paso 2. S_3 = (4, 5)

Paso 3. k = 5 y $a_5 = c_{35}$ = máx [10, 20] = 20. Etiquete el nodo 5 con [20, 3].

Se logra el avance. Continúe con el paso 5.

Paso 5. La ruta de avance se determina a partir de las etiquetas iniciando en el nodo 5 y regresando al nodo 1; es decir **(5)** -->α[20, 3] -->α**(3)** α>α[30, 1] α>α**(1)**. De este modo, N_1 α [1, 3, 5] y f_1 = mín {a_1, a_3, a_5} = {∞, 30, 20} = 20.

Las capacidades residuales a lo largo de la ruta N1 son

(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)

(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = 10, 202" (Taha, 2012, págs. 237-238)

De igual manera, Taha (2012), explica la iteración 2:

Iteración 2

Paso 1. Establezca a_1 5= ∞, y etiquete el nodo 1 con [∞, 2]. Establezca i = 1.

Paso 2.S_1 = {2, 3, 4}.

Paso 3. k = 2 y $a_2 = c_{12}$ = máx {20, 10,10}. Establezca i = 2, y repita el paso 2.

Paso 2. S_2 = {3,5}.

Paso 3. k = 3 y $a_3 = c_{23} = 40$. Etiquete el nodo 3 con [40,2]. Designe i = 3 y repita el paso 2.

Paso 2. S_3 = {4} (observe que $c_{35} = 0$, de ahí que el nodo 5 no pueda incluirse en S_3).

Paso 3. k = 4 y $a_4 = c_{34} = 10$. Etiquete el nodo 4 con [10,3]. Establezca i = 4, y repita el paso 2.

Paso 2. S_4 = {5} (observe que los nodos 1 y 3 ya están etiquetados, por lo tanto, no pueden incluirse en S_4).

Paso 3. k = 5 y $a_5 = c_{45} = 20$. Etiquete el nodo 5 con [20,4]. Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.

Paso 5. N_2 = {1, 2, 3, 4, 5} y f_2 = mín {∞, 20, 40,10,20} = 10. Los residuos a lo largo de la ruta de N_2 son

$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$
$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$
$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$
$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$
(pág. 239).

Así mismo, Taha (2012) nos explica la iteración 3.

Iteración 3

Paso 1. Establezca a_1 = q, y etiquete el nodo 1 con [∞, 2]. Establezca i = 1.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Paso 3. k = 2 y $a_2 = c_{12}$ = máx. {10, 10,10}. (Aunque los empates se rompen arbitrariamente, en el programa de TORA, este siempre selecciona el nodo empatado con el índice menor. Por esa razón usaremos esta convención a lo largo del ejemplo.) Etiquete el nodo 2 con [10,1]. Haga i = 2, y repita el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{3,5\}$.

Paso 3. k = 3 y $a_3 = c_{23} = {}_{30}$. Etiquete el nodo 3 con [30,2]. Establezca i = 3, y repita el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \emptyset$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Vaya al paso 4 para retroceder

Paso 4. Retroceso. La etiqueta [30,2] en el nodo 3 da el nodo inmediatamente anterior r = 2.

Elimine el nodo 3 tachándolo para ya no considerarlo en esta iteración. Establezca i = r = 2, y repita el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{5\}$ (observe que el nodo 3 se eliminó en el paso de retroceso).

Paso 3. k = 5 y $a_5 = c_{25} = 30$. Etiquete el nodo 5 con [30,2]. Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.

Paso 5. $N_2 = \{1, 2,5\}$ y c_5 = mín {∞,10,30} = 10. Los residuos a lo largo de la ruta de N_3 son $(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$ $(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10)$ (pág. 239).

Taha (2012) también nos explica las iteraciones 4, 5 y 6:

Iteración 4

Esta iteración da N_4 = {1,3,2,5} con f_4 = 10 (¡compruébelo!).

Iteración 5

Esta iteración da por resultado N_5 = {1, 4,5} con f_5 = 10 (¡compruébelo!).

Iteración 6

Todos los arcos que parten del nodo 1 tienen residuos cero. Por lo tanto, no son posibles más rutas de avance.

Procedemos al paso 6 para determinar la solución.

Paso 6. El flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + ... + f_5$ = 20 + 10 + 10 + 10 +10 = 60 unidades. El flujo en los arcos individuales se calcula restando los últimos residuos (c_{ij}, c_{ji}) en la iteración 6 de las capacidades de diseño tabla (pág. 240).

ARCO	$(C_{IJ},C_{JI}) - (c_{IJ},c_{JI})_6$	CANTIDAD DE FLUJO	DIRECCIÓN
(1,2)	(20,0) - (0,20) = (20, -20)	20	1-->2
(1,3)	(30,0) - (0,30) = (30, -30)	30	1-->3
(1,4)	(10,0) - (0,10) = (10, -10)	10	1-->4
(2,3)	(40,0) - (40,0) = (0, 0)	0	-
(2,5)	(30,0) - (10,20) = (20, -20)	20	2-->5
(3,4)	(10,5) - (0,15) = (10, -10)	10	3-->4
(3,5)	(20,0) - (0,20) = (20, -20)	20	3-->5
(4,3)	(5,10) - (15,0) = (-10, 10)	0	-
(4,5)	(20,0) - (0,20) = (20, -20)	20	4-->5

Tomadas de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Taha, Hamdy. (2012). *Investigación de operaciones* (novena ed.). México: Pearson. Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigacic3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf. [Consulta 20 de junio, 2013].

ILUMNO