SOLUCIÓN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD GRÁFICA Y ALGEBRAICA

SOLUCIÓN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD GRÁFICA Y ALGEBRAICA

Nota: *los ejemplos desarrollados a continuación son tomados de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). Págs. 108-111, 123-125 México: Pearson. Con fines didácticos, los ejemplos fueron adaptados a una realidad más cercana al estudiante.*

Mostraremos una idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).

2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Utilizaremos un ejemplo para explicar el caso 1 con el modelo del análisis de sensibilidad gráfica, y el modelo del análisis de sensibilidad algebraica.

Ejemplo cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones) con el análisis de sensibilidad gráfica

Línea Blanca S.A. fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de $ 30 y $ 20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si x_1 y x_2 son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

Maximizar $z = 30x_1 + 20x_2$

Sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 8$ (Máquina 1)
$x_1 + 3x_2 \leq 8$ (Máquina 2)
$x_1, x_2 \geq 0$

La siguiente figura 1

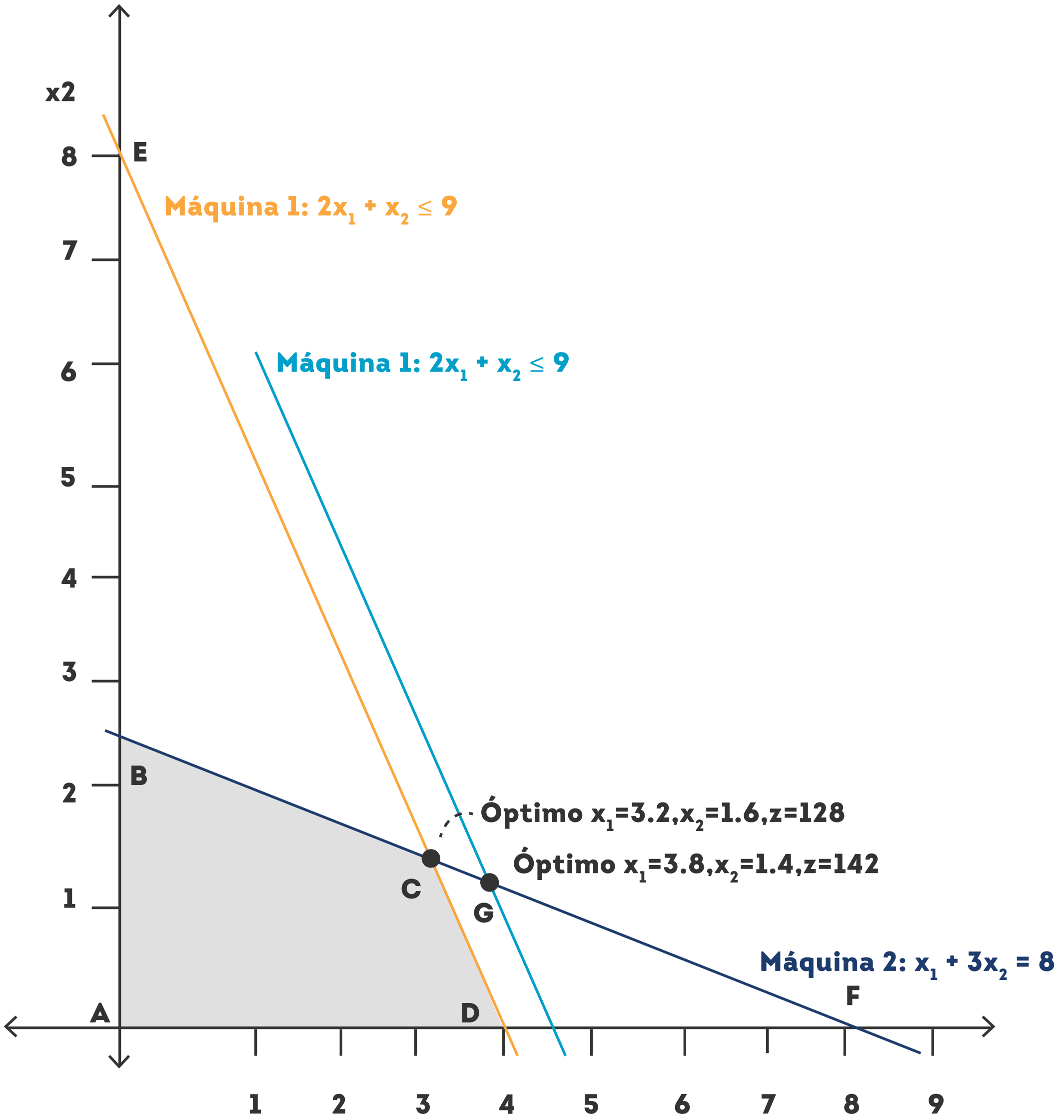

Tabla tomada de Taha. H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Esta figura ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La tasa de cambio en la z óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

Tasa de cambio del ingreso a consecuencia del incremento de la capacidad de la máquina 1 en 1 hota (punto C a punto G)

= ZG - ZC / Cambio de capacidad
=(142-128)/(9-8) = $14/h

La tasa calculada proporciona un vínculo directo entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en $ 1400.

SENSIBILIDAD GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA A CAMBIOS EN LA DISPONIBILIDAD DE RECURSOS (LADO DERECHO DE LAS RESTRICCIONES).

El nombre valor unitario de un recurso es una descripción apropiada de la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de precio dual (o sombra), y ahora este nombre es un estándar en toda la literatura de PL y en paquetes de software. La presentación en este libro se ajusta a este estándar.

En la figura 1 podemos ver que el precio dual de $ 14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueve su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea BF. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

Capacidad mínima de la máquina 1 [en B = (0.267)] = 2 x 0 + 1 x 2.67 = 2.67 h.

Capacidad máxima de la máquina 1 [en F = (8,0)] = 2 x 8 + 1 x 0 = 16 h.

La conclusión es que el precio dual de $1 4/h permanece válido en el intervalo
2.67 h ≤ Capacidad de la máquina 1 ≤ 16 h

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad). Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de $ 2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea DE. Ahora,

Capacidad mínima de la máquina 2 [en D = (4,0)] = 1 x 4 + 3 x 0 x= 4 h

Capacidad máxima de la máquina 2 [en E = (8,0)] = 1 x 0 + 3 x 8 = 24 h

Por lo tanto, el precio dual de $ 200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo
4 h ≤ Capacidad de la máquina 2 ≤ 24 h

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como intervalos de factibilidad. Todos los paquetes de software proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad, tal como lo pueden ver en la lectura Modelo seleccionados computacionales, donde presentamos un análisis de sensibilidad, realizado con TORA para este modelo.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como las siguientes preguntas lo demuestran:

Pregunta 1. Si Línea Blanca S.A puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

Según los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en $ 14, en comparación con solo $ 2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener la prioridad.

Pregunta 2. Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de $ 10/h para cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es 14 - 10 = $ 4, y para la máquina 2 es $ 2 - $ 10 = - $ 8. Por consiguiente, solo la máquina 1 debe considerarse para el incremento de capacidad.

Pregunta 3. Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es $ 14 y es válido en el intervalo (2.67, 16) h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad.

Por consiguiente, el incremento del ingreso es $ 14 (13 - 8) = $ 70, lo que significa que el ingreso total se incrementará de $ 128 a $ 198 (= $ 128 + $ 70).

Pregunta 4. Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas, ¿cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67, 16)h. Por lo tanto, solo podemos hacer una conclusión inmediata con respecto a un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para hallar la respuesta.

Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad no significa que el problema no tenga solución, sino que la información disponible no es suficiente para llegar a una conclusión completa.

Pregunta 5. ¿Cómo podemos determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos y lo veremos más adelante.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD ALGEBRAICA. CAMBIOS EN EL LADO DERECHO

En el ejemplo que acabamos de ver utilizamos la solución gráfica para determinar el precio dual (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Ahora ampliaremos el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de la empresa Juguetes S.A.) para facilitar la presentación. Una vez más, aclaramos que el ejemplo es tomado de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearso.

Ejemplo modelo de la empresa Juguetes S.A.

Juguetes S.A. utiliza tres operaciones para armar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y carros. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos por unidad de tren, camión y auto de juguete son de $ 3, $ 2 y $ 5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por auto son (2,0, 4) y (1,2,0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y autos, respectivamente, el modelo de PL asociado se da como:

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

Sujeto a

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)

$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)

$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Utilizando x_4, x_5 y x_6 como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

BÁSICA	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	SOLUCIÓN
Z	**4**	**0**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1350**
X_1	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
X_2	3/2	0	1	0	1/2	0	230
X_3	2	0	0	-2	1	1	20

Tabla tomada de Taha. H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 autos pero no trenes. El ingreso asociado es de $ 1350.

Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad

Utilizaremos el modelo de la empresa Juguetes S.A. para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla *simplex* óptima. Al reconocer que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que D_1, D_2 y D_3 son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de la empresa Juguetes S.A.original puede cambiarse entonces a
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

Sujeto a

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 + D_1$ (Operación 1)

$3x_1 + 2x_3 \leq 460 + D_2$ (Operación 2)

$x_1 + 4x_2 \leq 420 + D_3$ (Operación 3)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

BÁSICA	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS	D_1	D_2	D_3
							SOLUCIÓN			
Z	**-3**	**-2**	**-5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
X_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
X_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
X_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Tabla tomada de Taha. H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Para expresar la tabla *simplex* óptima del problema modificado en función de los cambios D_1, D_2 y D_3, primero volvemos a escribir la tabla de inicio con los nuevos lados derechos, $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por consiguiente, si repetimos las mismas iteraciones simplex (con las mismas operaciones de filas) como en el modelo original, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir:

Tabla tomada de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones. México: Pearson

BÁSICA	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS	D_1	D_2	D_3
							SOLUCIÓN			
Z	**4**	**0**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1350**	**1**	**2**	**0**
X_4	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100	1/2	-1/4	0
X_5	3/2	0	1	0	1/2	0	230	0	1/2	0
X_6	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

La nueva tabla óptima da la siguiente solución óptima:

$z=1350 + D_1+2D_2$

$x_2=100 + (1/2)D_1-(1/4)D_2$

$x_3=230 + (1/2)D_2$

$x_4=20 - 2D_1 + D_2 + D_3$

Ahora utilizamos esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

Precios duales: el valor de la función objetivo puede escribirse como:

$z = 1350 + 1D_1 + 2D_2 + 0D_3$

La ecuación muestra que:

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ($D_1 = \pm 1$ min) cambia a z en $ 1.

2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ($D_2 = \pm 1$ min) cambia a z en $ 2

3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ($D_3 = \pm 1$ min) cambia a z en $ 0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 ($min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes D_1, D_2 y D_3 en la fila z óptima son exactamente los de las variables de holgura x_4, x_3 y x_6. Esto significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de holgura en la fila z óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso porque cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

Intervalo de factiblidad: la solución actual permanece factible si todas las variables básicas permanecen no negativas, es decir

$x_2=100 + (1/2)D_1-(1/4)D_2 \geq 0$

$x_3=230 + (1/2)D_2 \geq 0$

$x_6=20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$

Los cambios simultáneos de D_1, D_2 y D_3 que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina sustituyendo los valores de D_1, D_2 y D_3.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que el tiempo de fabricación disponible para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$ y $D_3 = 400 - 420 = -20$. Sustituyendo en las condiciones de factibilidad, obtenemos:

$x_2= 100 + (1/2)50-(1/4)(-20)=130 > 0$ (Factible)

$x_3= 230 + (1/2)(-20) = 220 > 0$ (Factible)

$x_6= 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0$ (No factible)

Los cálculos demuestran que $x_6 < 0$, de ahí que la solución actual no permanezca factible.

Se requerirán más cálculos para encontrar la nueva solución. Como alternativa, si los cambios de los recursos son tales que $D_1 = -30$, $D_2 =$

-12 y $D_3 = 10$, entonces

$x_2 = 100 + (1/2)(-30)-(1/4)(-12)=88 > 0$ (Factible)

$x_3 = 230 + (1/2)(-12) = 224 > 0$ (Factible)

$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (-10) = 78 < 0$ (Factible)

La nueva solución factible (óptima) es $x_1 = 88$, $x_3 = 224$, y $x_6 = 68$ con $z = 3(0) + 2(88)$

1 5(224) = $ 1296. Observe que el valor objetivo óptimo también puede calcularse utilizando los precios duales como $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$\ 1296$.

Las condiciones dadas pueden producir los intervalos de factibilidad individuales asociados con cambiar los recursos uno a la vez (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio del tiempo de la operación 1 sólo implica que $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto, las condiciones simultáneas se reducen a:

$$\left.\begin{aligned} &x_2=100 + (1/2)D_1 \geq 0 \dashrightarrow D_1 \geq 0 \\ &x_3=230 > 0 \\ &x_6=20 - 2D_1 \geq 0 \dashrightarrow D_1 \leq 0 \end{aligned}\right\} -200 \leq D_1 \leq 100$$

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibi lidad $-200 \leq D_1 \leq 10$.

Podemos demostrar del mismo modo que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son $-20 \leq D_2 \leq 400$ y $-20 < D_3 < \infty$, respectivamente.

Ahora podemos resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo empresa Juguetes S.A. como sigue:

			CANTIDAD DE RECURSO (MINUTOS)		
RECURSO	PRECIO DUAL	INTERVALO DE FACTIBILIDAD	MÍNIMA	ACTUAL	MÁXIMA
Opreación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	400
Opreación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Opreación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	∞

Tabla tomada de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

Es importante señalar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio simultáneo que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios violen los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios $D_1 = 30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 100$ mantendrán la solución factible aun cuando $D_1 = 30$ viole el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$, como los siguientes cálculos lo demuestran:

$x_2 = 100 + (1/2)(30)-(1/4)(-12)=118 > 0$ (Factible)

$x_3 = 230 + (1/2)(12) = 224 > 0$ (Factible)

$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 < 0$ (Factible)

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que podemos calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como $z=1350+1(30)+2(-12)+0(100)=\$1356$.

ILUMNO