MÉTODO *SIMPLEX* Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

MÉTODO *SIMPLEX* Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

1. INTRODUCCIÓN

El método *simplex* es uno de los mejores métodos para resolver un problema de programación lineal, porque es de fácil aplicación, de tipo algorítmico y conduce a una eficiente solución del problema.

TODOS LOS PAQUETES COMERCIALES (Y TORA) ACEPTAN DIRECTAMENTE LAS RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD, EL LADO DERECHO NO NEGATIVO Y LAS VARIABLES IRRESTRICTAS.

Le recomiendo la lectura complementaria sobre conceptos y aspectos relevantes sobre el método simplex.

2. MODELO DE PL EN FORMA DE ECUACIÓN

Cuando desarrollamos cálculos con el método *simplex*, éstos se facilian si cumplen los siguientes dos requerimientos a las restricciones de programación lineal, según nos menciona Thaha (2012)

1. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.

2. Todas las variables son no negativas. (Taha, 2012, pág. 69).

Conversión de las desigualdades en ecuaciones con lado derecho no negativo

Según Thaja (2012) "en un modelo de Programación Lineal económico, el lado derecho representa la disponibilidad de un recurso y el izquierdo, el uso del recurso por todas las actividades del modelo (variables). La cantidad excedente del lado derecho respecto del izquierdo da entonces la cantidad no utilizada del recurso.

Para convertir una desigualdad (≤) en ecuación se agrega una variable de holgura al lado izquierdo de la restricción.

TIPO DE RESTRICCIÓN	TIPO DE VARIABLE AGREGADA
$a \leq b$	HOLGURA $a + H = b$
$a \geq b$	EXCESO $a - E = b$

Estas son variables ficticias que representa la capacidad no utilizada de algún recurso.

3. TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA

MÉTODO GRÁFICO	MÉTODO ALGEBRAICO
Grafique todas las restricciones, incluidaslas de no negatividad.	Represente el espacio de soluciones por m ecuaciones en n variables y limite todas las variables a valores no negativos, $m < n$.
El espacio de soluciones consta de una infinidad de puntos factibles.	El sistema tiene infinidad de soluciones factibles
Identifique los puntos de esquina factibles del espacio de soluciones.	Determine las soluciones básicas factibles de las ecuaciones.
Una cantidad finita de puntos de esquina da los candidatos para la solución óptima.	Una cantidad finita de soluciones factibles básicas da las candidatas para la s óptima.
Use la función objetivo para determinar el punto de esquina óptimo de entre todos los candidatos.	Use la función objetivo para determinar la solución factible básica óptima de entre todas las candidatas.

Figura 1. Fuente: (Taha, 2012, pág. 72) adaptado con fines meramente académico.

Basaremos el desarrollo del método *simplex* algebraico por la secuencia de ideas descritas por la solución gráfica que se muestra en la figura 1. El espacio de soluciones está representado por la intersección de los semiplanos que representan las restricciones, lo representamos por

(m) ecuaciones lineales simultáneas - Restricciones

(n) variables no negativas - Variables

Espacio de soluciones algebraicas -> definido por m x n ecuaciones, $m < n$. Las soluciones básicas -> corresponden a los puntos de esquina en el espacio de soluciones gráficas.

¿Cuántas variables sobran en el modelo para hacerlas cero? -> **n-m**

Se precisan igualando n - m variables a cero y resolviendo las m ecuaciones para las m variables restantes, siempre que la solución resultante sea única.

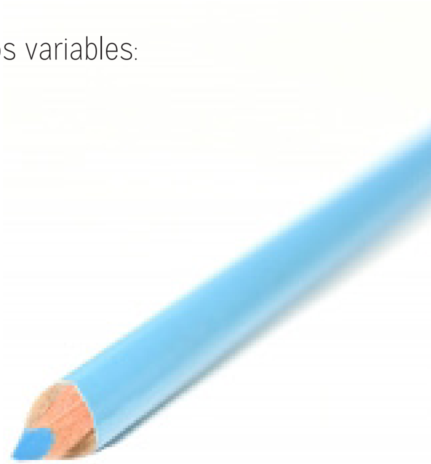
$C^{c}_{m}=(n!/\ m!\ (n-m)!)$

Figura 2.

Ejemplo 1

Considere el siguiente ejemplo de Programación Lineal con dos variables:

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 + 2x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$



Apliquemos

(m) ecuaciones lineales simultáneas - Restricciones
(n) variables no negativas - Variables

La figura 2 proporciona el espacio de soluciones gráficas para el problema.

Algebraicamente, el espacio de soluciones de la PL está representado por las siguientes m=2 ecuaciones o restricciones y n = 4 variables:

$2x_1 + x_2 + s_1 = 4$
$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Las soluciones básicas se determinan estableciendo las

n - m = 4 - 2 = 2 variables iguales a cero y resolviendo las m = 2 variables restantes. Por ejemplo, si establecemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, las ecuaciones proporcionan la solución básica única.

$s_1 = 4$, $s_2 = 5$

Esta solución corresponde al punto A en la figura 3 (verifíquelo usted mismo de que s_1=4 y s_2 = 5 en el punto A).

Determinemos otro punto con $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$ y resolviendo luego las dos ecuaciones resultantes.

$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

La solución básica asociada es ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$), o el punto C en la figura 3 nuevamente verifíquelo usted mismo.

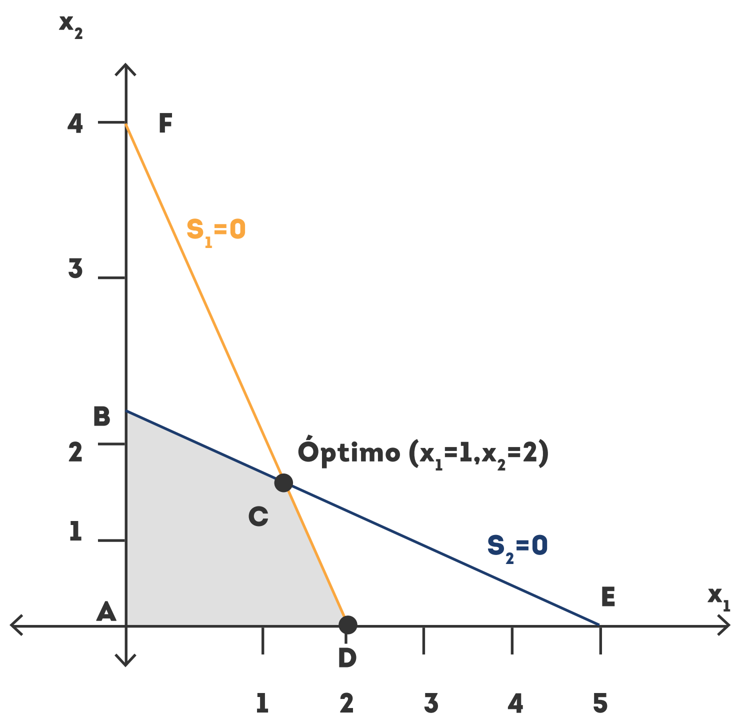


FIGURA 3 Espacio de soluciones de PL del ejemplo 1, tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Si nos preguntamos cuáles variables n - m deben igualarse a cero en busca de un punto de esquina específico. Sin el beneficio del espacio de soluciones gráficas (el cual está disponible a lo sumo solo con tres variables), no podemos especificar las (n - m) variables cero asociadas con un punto de esquina dado.

El cual, no implica que enumeremos todos los puntos de esquina del espacio de soluciones. Sencillamente considere todas las combinaciones en las que n - m variables son iguales a cero y resuelva las ecuaciones resultantes. Una vez realizado esto, la solución óptima es la solución básica factible (punto de esquina) con el mejor valor objetivo.

Si aplicamos lo hemos venido diciendo para nuestro ejemplo, tenemos entonces:

$$^{4}C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Valla de nuevo al gráfico de la Figura 3 observe los cuatro puntos de esquina A, B, C y D.

Nos preguntamos, ¿dónde están los dos restantes?, los puntos E y F también son puntos de esquina; pero estos puntos son no factibles, y, por consiguiente, no son candidatos para la solución óptima.

PARA COMPLETAR LA TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA, LAS N - M VARIABLES CERO SE CONOCEN COMO VARIABLES NO BÁSICAS.

Para completar la transición de la solución gráfica a la algebraica, las n - m variables cero se conocen como variables no básicas. Las m variables restantes se llaman variables básicas y su solución (obtenida resolviendo las m ecuaciones) se conoce como solución básica. La siguiente tabla muestra todas las soluciones básicas y no básicas de este ejemplo.

VARIABLES NO BÁSICAS (CERO)	VARIABLES BÁSICAS	SOLUCIÓN BÁSICA	PUNTO DE ESQUINA ASOCIADO	¿FACTIBLE?	VALOR OBJETIVO, Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	A	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, - 3)	F	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	B	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	D	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, - 6)	E	No	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	C	Sí	8 **(óptimo)**

Tabla tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

4. NATURALEZA ITERATIVA DEL MÉTODO *SIMPLEX*

De acuerdo con Taha (2012):

En el gráfico del ejemplo que venimos explicando, se muestra el espacio de soluciones de la programación lineal.

En consecuencia, el método *simplex* se inicia en el origen (punto A), donde $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, y el valor objetivo, z, es cero.

¿Si un incremento en x_1 y/o x_2 (o ambas) no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de z?

Se responde investigando la función objetivo:

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

El diseño del método *simplex* no permite el incremento simultáneo de las variables. En cambio, incrementa una a la vez.

La variable que va a aumentar es la que tenga mayor grado de mejora en z.

En el ejemplo mencionado, el grado de mejora del valor de z es de 2 unidades para x_1 y de 3 para x_2.

Por lo tanto, elegimos x_2 para que crezca (la cual es la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas).

De acuerdo con Taha (2012), tenemos entonces que el valor de ‹x_2 debe incrementarse hasta que se llegue al punto de esquina B. Recordemos que no llegar al punto de esquina B no es una opción, porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina. En el punto B, el método *simplex* incrementará el valor de x_1 para llegar al punto de esquina mejorado C, el cual es el óptimo.

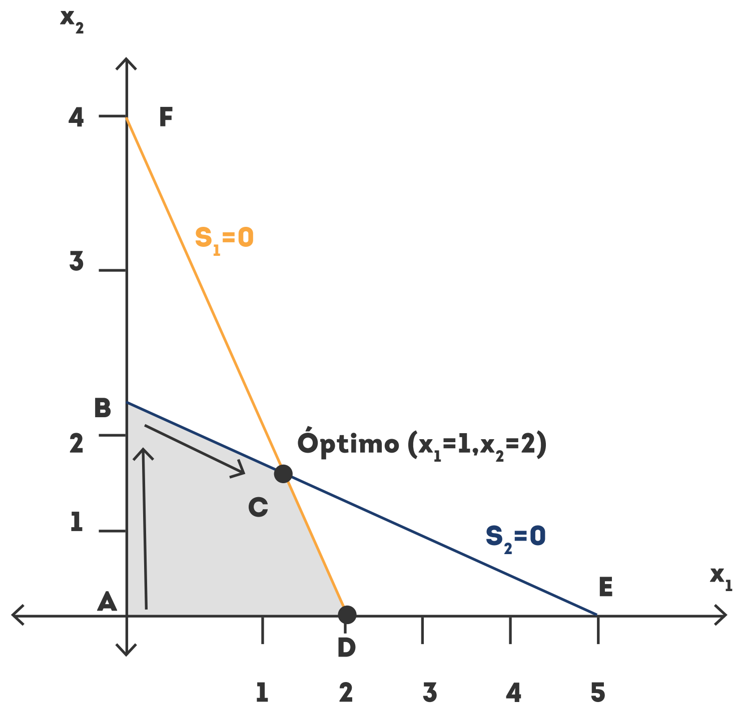


FIGURA 4 Proceso iterativo del método *simplex*, tomada de tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson.

Según vemos en el gráfico de la figura anterior, la trayectoria del algoritmo *simplex* se define como A->B->C.

Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una iteración. Destaquemos que el método *simplex* se mueve a lo largo de los bordes del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo, es decir, irse directamente de A a C. (pág. 77)

MÉTODO *SIMPLEX* EN PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

De acuerdo con Taha (2012):

En problemas de minimización, la condición de optimalidad requiere que se seleccione la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más positivo en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que máx z equivale a mín (-z). En cuanto a la condición de factibilidad para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

EN PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN, LA CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD REQUIERE QUE SE SELECCIONE LA VARIABLE DE ENTRADA COMO LA VARIABLE NO BÁSICA CON EL COEFICIENTE OBJETIVO MÁS POSITIVO EN LA ECUACIÓN OBJETIVO.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable no básica con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila z. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable básica asociada con la relación mínima no negativa con el denominador estrictamente positivo. Los vínculos se rompen arbitrariamente (Pág. 85).

ANÁLISIS DE MODELOS SELECCIONADOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Análisis de sensibilidad

Según Omaña (sf). mencionaremos los aspectos y conceptos relevantes sobre análisis de sensibilidad.

Análisis de sensibilidad, llamado también análisis de post-optimización, es una estrategia utilizada para tomar en consideración los cambios que pueden ocurrir en los elementos componentes del modelo. Permite conocer cuán sensible es la solución óptima a cambios que ocurran en coeficientes, variables, restricciones y función objetivo.

Siendo determinístico, el modelo de programación lineal, asume que se conocen con certeza sus datos de insumo. Sin embargo, nada en la vida es constante. Por ello, el análisis de sensibilidad justifica plenamente la utilización de este modelo al presentar los efectos de los cambios que pueden ocurrir durante el periodo de planificación para el que se está utilizando el modelo, y aún durante la solución del mismo.

Cuando cambia un número, insumo del modelo, tal como un coeficiente o parámetro, o un lado derecho de una restricción, el análisis de sensibilidad de la solución muestra un rango de valores dentro de los cuales ese número puede cambiar sin cambiar la solución básica obtenida.

Disminuir el lado derecho de una restricción del tipo “mayor o igual que” ( )→o incrementarlo en una restricción del tipo “menor o igual que” ( )→implica hacerla más fácil de satisfacer. El espacio de solución, en estos casos, se expande o lo deja igual.

Disminuir el lado derecho de una restricción del tipo “menor o igual que” ( )→o incrementarlo en una restricción del tipo “mayor o igual que” ( )→implica hacerla más difícil de satisfacer. El espacio de solución, en estos casos, se contrae o lo deja igual.

Cuando ocurren cambios en el número de variables, aparece una nueva restricción o cambian todos los coeficientes en el objetivo, el análisis de sensibilidad indicará el efecto que esto ocasiona sobre la solución básica.

Es importante recordar que el análisis se refiere a la sensibilidad de la solución básica óptima, no a la sensibilidad de un coeficiente o de una restricción, etc. (pag. 34)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Taha, Hamdy. (2012). *Investigación de operaciones* (novena ed.). México: Pearson. Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigaci-c3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf. [Consulta 20 de junio 2013].

Valencia, M. (2012). *Módulo 2: método simplex y análisis de sensibilidad*. Publicado https://liboasso.epic-sam.net/Learn/Player.aspx?enrollmentid=3784132 [Consulta 22 marz. 2014].

Guzmán, G. (2005). *Módulo programación lineal*. Neiva (Huila): Editorial Universidad Nacional Abierta y a Distancia – Unad Recuperado de http://es.scribd.com/doc/171465217/manualprogramacionlinealjulio20-100422211609-phpapp01.pdf. [Fecha de consulta: 23 marzo de 2014].

Omaña, G. (sf). Manual Investigación de Operaciones. Escuela de Economía de la Universidad de Carabobo. Recuperado de http://search.4shared.com/postDownload/JIOVNAGN/MANUAL_INV_OPER.html [Fecha de consulta: 23 marzo de 2014].

ILUMNO