MODELO DE MINIMIZACIÓN

EJEMPLO SOLUCIÓN DE UN MODELO DE MINIMIZACIÓN

Nota: *los siguientes ejemplos fueron tomados de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena edición). México: Pearson. Págs. 24-25 . Recuperado de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigacic3b3n-de-operaciones-9na-edici-c3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf.*

[Consulta 20 de junio, 2014]. Con un fin meramente didáctico, estos ejemplos fueron adaptados a una realidad más cercana para el estudiante.

Ejemplo Empresa Alimentos S.A., problema de la dieta

Alimentos S.A. consume diariamente un mínimo de 800 lb de un alimento especial, el cual es una mezcla de maíz y soya con las siguientes composiciones:

LB POR LB DE FORRAJE

FORRAJE	PROTEÍNA	FIBRA	COSTO ($/LB)
Maíz	.09	02	.30
Soya	.60	06	.90

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30 % de proteína y un máximo de 5 % de fibra.

El objetivo es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo.
Las variables de decisión del modelo son:

x_1 = libras de maíz en la mezcla diaria
x_2 = libras de soya en la mezcla diaria

El objetivo es minimizar el costo diario total (en dólares) de la mezcla de alimento, es decir,

Minimizar $z = .3x_1 + .9x_2$

Las restricciones representan la cantidad diaria de la mezcla y las necesidades dietéticas. Alimentos S.A. requiere un mínimo de 800 lb de alimento al día, es decir,

$x_1 + x_2 \geq 800$

La cantidad de proteína contenida en x1 libras de maíz y en x_2 libras de soya es:

$(.09x_1 + .6x_2)$ lb.

Esta cantidad debe ser al menos igual al 30 % de la mezcla de alimentos total $(x_1 + x_2)$ lb, es decir,

$.09x_1 + .6x_2 \geq .3(x_1 + x_2)$

Asimismo, la necesidad de fibra de 5 % máximo se representa como sigue:

$.02x_1 + .06x_2 \leq .05(x_1 + x_2)$

Las restricciones se simplifican cambiando los términos en x1 y x2 al lado izquierdo de cada desigualdad, con solo una constante del lado derecho. El modelo completo es

Minimizar $z = .3x_1 + .9x_2$

Sujeto a:

$x_1 + x_2 \geq 800$
$.21x_1 - .30x_2 \leq 0$
$.03x_1 - .01x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$

La siguiente figura muestra la solución gráfica del modelo.

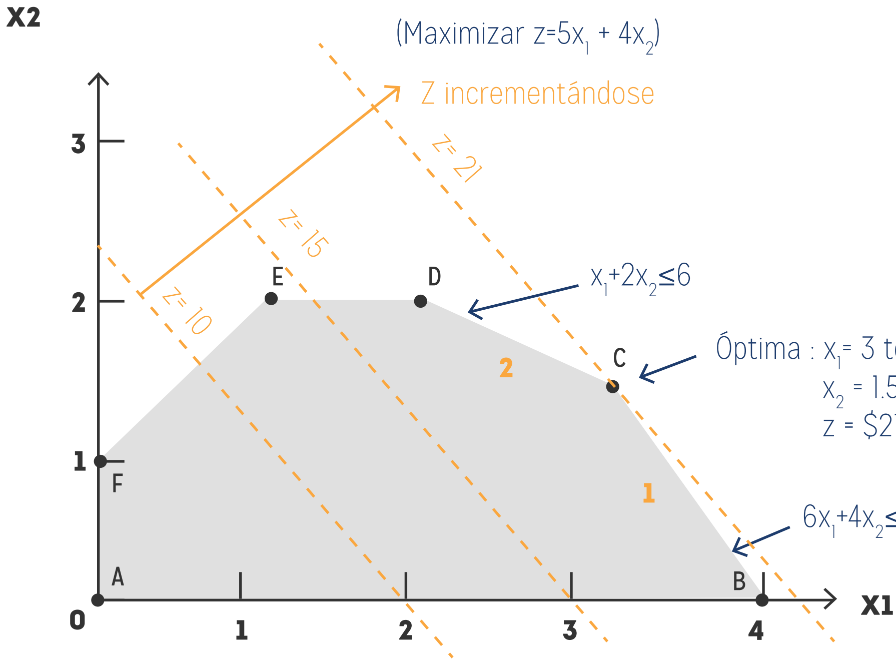

Figura tomada de Taha, H. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

La segunda y tercera restricciones pasan por el origen. De este modo, a diferencia del ejemplo de solución del modelo de maximización de la empresa Alimentos S.A. la determinación de los semiplanos factibles de estas dos restricciones requiere que se utilice un punto de referencia diferente de (0,0), por ejemplo, (100,0) o (0,100).

Solución:

El modelo minimiza el valor de la función objetivo al reducir z en la dirección que se muestra en la figura 1

Al momento de graficar las ecuaciones tenemos:

1. $x_1 + x_2 \geq 800$

$x_1=0 \quad 0 + x_2 \geq 800$

(0,800)

$x_2=0 \quad x_1 + 0 \geq 800$

(800,0)

Las rectas de la ecuación 2 y 3 parten desde el origen del plano cartesiano, por lo tanto, para resolver los puntos de intersección se realiza un sistema de ecuaciones.

La intersecta las ecuaciones 1 y 2.

Interceptamos ambos puntos como parte de la recta $x_1+x_2 \geq 800$

2. . $21x_1 - .3x_2 \leq 0$,

$x_1=0 \quad 0 - .3x_2 \leq 0$

(0,0)

$x_2=0 \quad 21x_1 - 0 \leq 0$

(0,0)

3. $.03x_1 - .01x_2 \geq 0$

$x_1=0 \quad 0 - .01x_2 \geq 0$

(0,0)

$x_2=0 \quad .03x_1 - 0 \geq 0$

(0,0)

La intersecta las ecuaciones 1 y 2:

$x_1 \;+\; x_2 \geq 800 \quad /(-0.21)$
$.21x_1 - \;.3x_2 \leq 0$

$-0.21x_1 \;+ -0.21\,x_2 \geq -166 \quad /(-0.21)$
$.21x_1 \;-\; .3x_2 \leq 0$

$0 \;-\; 0.51\,x_2 \geq -166$
$x_2 \leq \; 329.4$

Reemplazando x_2=329.4 en la ecuación $.21x_1 - \;.3x_2 \leq 0$
x_1 =470.6

El punto es (470.6, 329.4).

La intersecta las ecuaciones 1 y 3:
$x_1 \;+\; x_2 \geq 800 \quad /(0.01)$
$.03x_1 \;-\; .01x_2 \;\geq 0$

$0.01x_1 \;+ 0.01\,x_2 \geq 8 \quad /(0.01)$
$.03x_1 - \;.01x_2 \;\geq 0$

$.04x_1 - 0 \qquad \geq 8$
$x_1 \;\geq\; 200$

Reemplazando x_1=8 en la ecuación $.03x_1 \;-\; .01x_2 \;\geq 0$
x_2 =600

El punto queda como (200, 800).

El modelo minimiza el valor de la función objetivo al reducir z en la dirección que se muestra en el gráfico de la figura 2 más adelante, la solución óptima es la intersección de las dos líneas.

$x_1 + x_2 = 800$
$.21x_1 - \;.3x_2 = 0,$

Evaluando los valores de cada punto de la gráfica en la función objetivo de encontrar la mayor rentabilidad en la combinación de la pintura es:

PUNTO DE LA GRÁFICA	0,3 X_1	0,9 X_2	MAXIMIZAR Z
Punto (470.6,29.4)	0,3(470,6)	0,9(329,4)	\$437,64
Punto (200,600)	0,3(200)	0,9(600)	\$600

De forma tal que el costo mínimo de la mezcla de alimentos es
x_1 = 470.6 lb de maíz y x_2 = 329.4 lb. de soya

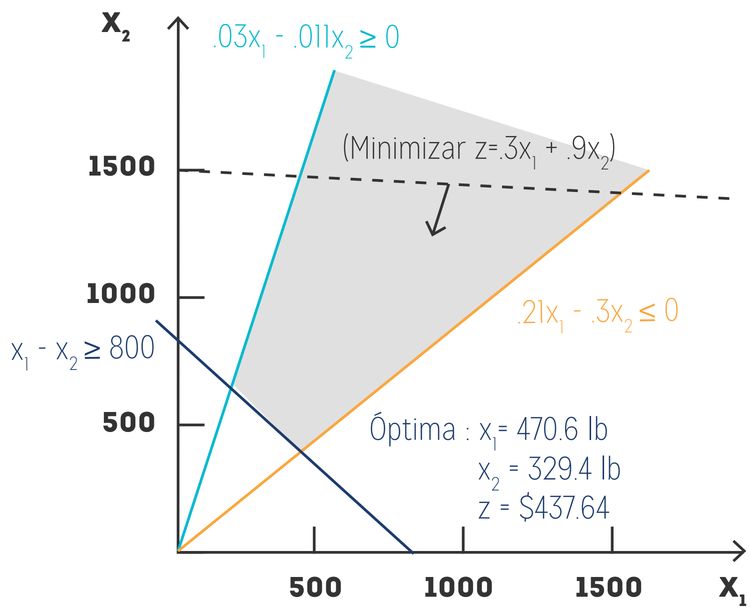

FIGURA 2 Solución gráfica del modelo de la dieta. Tomada de Taha, Hamdy. (2012). Investigación de operaciones (novena ed.). México: Pearson.

ILUMNO