ANÁLISIS DE VARIANZA Y DE CORRELACIÓN

ANÁLISIS DE VARIANZA

ANÁLISIS DE VARIANZA A UNA VÍA – DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

El objetivo de este diseño es controlar algunas fuentes extrañas de variación. Tiende a proporcionar una mejor estimación de la varianza del error y conduce a pruebas de hipótesis más robustas en términos de la posibilidad de detectar diferencias entre medias de tratamientos. (Anderson, 2008, p. 514 y siguientes)

Procedimiento ANOVA

En el procedimiento ANOVA para el diseño de bloques aleatorizados se requiere que se haga una partición de la suma total de cuadrados (STC) en tres grupos: suma de cuadrados debidas a los tratamientos, suma de cuadrados debidas a los bloques y suma de cuadrado debidas al error. La fórmula para esta partición es la siguiente.

$$STC = SCTR + SCBL + SCE \tag{13.21}$$

Esta suma de la partición de cuadrados se presenta en la tabla ANOVA para el diseño de bloques aleatorizado, como se muestra en la tabla 13 7 La notación empleada en la tabla es

$$k = \text{número de tratamientos}$$
$$b = \text{número de bloques}$$
$$n_T = \text{tamaño muestral total } (n_T = kb)$$

Observe que en la tabla ANOVA también se muestra la partición de los $n_T - 1$ grados de libertad totales de manera que $k - 1$ grados de libertad correspondan a los tratamientos, $b - 1$ correspondan a los bloques y $(k - 1)(b - 1)$ correspondan al término del error. En la columna cuadrado medio se dan las sumas de los cuadrados divididas entre los grados de libertad y $F =$ CMTR/CME es el cociente F que se usa para probar si hay diferencias significativas entre las medias de los tratamientos. La contribución más importante del diseño de bloques aleatorizado es que, al emplear bloques se eliminan del término CME las diferencias individuales de los controladores y se obtiene una prueba más sólida para las diferencias de estrés entre las tres alternativas de puestos de trabajo.

TABLA 13.7 TABLA ANOVA PARA EL DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIZADO CON k TRATAMIENTOS Y b BLOQUES

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Valor-p
Tratamientos	SCTR	$k-1$	$\text{CMTR}=\dfrac{\text{SCTR}}{k-1}$	$\dfrac{\text{CMTR}}{\text{CME}}$	
Bloques	SCBL	$b-1$	$\text{CMBL}=\dfrac{\text{SCBL}}{b-1}$		
Error	SCE	$(k-1)(b-1)$	$\text{CME}=\dfrac{\text{SCE}}{(k-1)(b-1)}$		
Total	STC	n_T-1			

Cálculos y conclusiones

Para calcular el estadístico F que se necesita para probar si hay diferencia entre las medias de los tratamientos en un diseño de bloques aleatorizado, se necesita calcular el CMTR y el CME. Para calcular estos dos cuadrados medios, es necesario calcular primero SCTR y SCE; para esto también se calcula SCBL y STC. Para hacerlo más sencillo, estos cálculos se realizan en cuatro pasos. Además de la notación k, b y n_T ya introducida, se usará:

x_{ij} = valor de la observación correspondiente al tratamiento j en el bloque i.
$\bar{x}_{\cdot j}$ = media muestral con el tratamiento j
$\bar{x}_{i\cdot}$ = media muestral en el bloque i
$\bar{\bar{x}}$ = media muestral general

Paso 1. Calcular la suma total de cuadrados (STC)

$$\text{STC}=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 \tag{13.22}$$

Paso 2. Calcular la suma de los cuadrados debidos a los tratamientos (SCTR).

$$\text{SCTR}=b\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}})^2 \tag{13.23}$$

Paso 3. Calcular la suma de los cuadrados debidos a los bloques (SCBL).

$$\text{SCBL}=k\sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2 \tag{13.24}$$

Paso 4. Calcular la suma de cuadrados debidos al error (SCE).

$$\text{SCE}=\text{STC}-\text{SCTR}-\text{SCBL} \tag{13.25}$$

Ejemplo:

Como resultado de un estudio para medir la fatiga y el estrés de los controladores del tráfico aéreo, se propusieron modificaciones y rediseños al puesto de trabajo. Después de considerar diversos diseños del puesto de trabajo, se seleccionaron tres alternativas consideradas con el mayor potencial para reducir el estrés en los controladores. La pregunta clave es: ¿En qué medida difieren estas tres alternativas en su efecto sobre el estrés de los controladores? Para responder esta pregunta se necesita diseñar un experimento que proporcione mediciones del estrés de los controladores del tráfico aéreo bajo cada una de estas alternativas.

Si se empleara un diseño completamente aleatorizado, una muestra aleatoria de controladores sería asignada a cada uno de los alternativos puestos de trabajo. Pero, se entiende que los controladores difieren sustancialmente en su habilidad para manejar situaciones estresantes. Lo que para un controlador es un gran estrés, para otro puede ser sólo un estrés moderado e incluso pequeño. Por tanto, al considerar la fuente de variación dentro del grupo (CME), hay que tener en cuenta que esta variación comprende tanto el error aleatorio como el error debido a las diferencias individuales de los controladores. En efecto, los administradores consideran que la variabilidad entre los controladores será la contribución principal al término CME.

Una manera de hacer a un lado el efecto de las diferencias individuales es usar el diseño de bloques aleatorizado. En ese diseño, se identifica la variabilidad debida a las diferencias individuales de los controladores y se elimina del término CME. En el diseño de bloques aleatorizado se emplea una sola muestra de controladores. Cada uno de los controladores de la muestra se prueba con cada una de las tres alternativas de puestos de trabajo. En la terminología del diseño de experimentos el puesto de trabajo es el *factor de interés* y los controladores son los *bloques*. Los tres tratamientos o poblaciones del factor puesto de trabajo son las tres alternativas de puesto de trabajo. Para simplificar, a las tres alternativas del puesto de trabajo se les designará como sistema A, sistema B y sistema C.

El aspecto *aleatorizado* en el diseño de bloques aleatorizado es el orden aleatorio en el que les son asignados los tratamientos (sistemas) a los controladores. Si cada controlador probara los tres sistemas en el mismo orden, cualquier diferencia encontrada entre los sistemas podría deberse al orden de la prueba y no a las verdaderas diferencias entre los sistemas.

Para obtener los datos necesarios, en el Centro de Control Cleveland en Oberlin, Ohio, se instalaron las tres alternativas de puesto de trabajo. Se seleccionaron seis controladores en forma aleatoria y se asignó cada uno a uno de los sistemas para que lo operara. Después de practicar una entrevista y un examen médico a cada uno de los participantes en el estudio se obtuvieron las mediciones del estrés de cada controlador en cada uno de los sistemas. En la tabla 13.5 se presentan estos datos.

En la tabla 13.6 aparece un resumen de los datos de estrés recolectados. En esta tabla se presentan también los totales de las columnas (tratamientos) y los totales de los renglones (bloques)

TABLA 13.5 DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIZADO PARA LA PRUEBA DE ESTRÉS EN LOS CONTROLADORES DE TRÁFICO AÉREO

		Tratamiento		
		Sistema A	Sistema B	Sistema C
Bloques	Controlador 1	15	15	18
	Controlador 2	14	14	14
	Controlador 3	10	11	15
	Controlador 4	13	12	17
	Controlador 5	16	13	16
	Controlador 6	13	13	13

TABLA 13.6 RESUMEN DE LOS DATOS DE ESTRÉS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE ESTRÉS APLICADA A LOS CONTROLADORES AÉREOS

		Tratamientos			Total del renglón o del bloque	Media del bloque
		Sistema A	Sistema B	Sistema C		
Bloques	Controlador 1	15	15	18	48	$\bar{x}_{1\cdot} = 48/3 = 16.0$
	Controlador 2	14	14	14	42	$\bar{x}_{2\cdot} = 42/3 = 14.0$
	Controlador 3	10	11	15	36	$\bar{x}_{3\cdot} = 36/3 = 12.0$
	Controlador 4	13	12	17	42	$\bar{x}_{4\cdot} = 42/3 = 14.0$
	Controlador 5	16	13	16	45	$\bar{x}_{5\cdot} = 45/3 = 15.0$
	Controlador 6	13	13	13	39	$\bar{x}_{6\cdot} = 39/3 = 13.0$
Total de la columna o tratamiento		81	78	93	252	$\bar{\bar{x}} = \frac{252}{18} = 14.0$
Media del tratamiento		$\bar{x}_{\cdot 1} = \frac{81}{6} = 13.5$	$\bar{x}_{\cdot 2} = \frac{78}{6} = 13.0$	$\bar{x}_{\cdot 3} = \frac{93}{6} = 15.5$		

así como algunas medias muestrales necesarias que serán útiles para hacer los cálculos de la suma de los cuadrados del ANOVA. Como valores bajos de estrés se consideran mejores, los datos muestrales parecen favorecer al sistema B, en el que la media de las mediciones del estrés es 13. Sin embargo, la pregunta persiste: ¿los resultados muestrales justifican la conclusión de que las medias poblacionales de los niveles de estrés, con estos tres sistemas, difieren? Es decir, ¿son las diferencias estadísticamente significativas? Para responder esta pregunta estadística se emplea un análisis del cálculo de la varianza, similar al empleado en el diseño completamente aleatorizado.

En el caso de los datos de la tabla 13.6 sobre los controladores del tráfico aéreo, con estos cálculos se obtienen las sumas de los cuadrados siguientes.

Paso 1. $STC = (15 - 14)^2 + (15 - 14)^2 + (18 - 14)^2 + \cdots + (13 - 14)^2 = 70$

Paso 2. $SCTR = 6[(13.5 - 14)^2 + (13.0 - 14)^2 + (15.5 - 14)^2] = 21$

Paso 3. $SCBL = 3[(16 - 14)^2 + (14 - 14)^2 + (12 - 14)^2 + (14 - 14)^2 + (15 - 14)^2 + (13 - 14)^2] = 30$

Paso 4. $SCE = 70 - 21 - 30 = 19$

TABLA 13.8 TABLA ANOVA PARA LA PRUEBA DEL ESTRÉS DE LOS CONTROLADORES DEL TRÁFICO AÉREO

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Valor-p
Tratamientos	21	2	10.5	10.5/1.9 = 5.53	0.0241
Bloqueos	30	5	6.0		
Error	19	10	1.9		
Total	70	17			

Las sumas de cuadrados divididas entre sus grados de libertad dan los correspondientes cuadrados medios que se muestran en la tabla 13.8.

Ahora, para realizar la prueba de hipótesis, se va a usar $\alpha = 0.05$ como nivel de significancia. El valor del estadístico de prueba es

$$F = \frac{CMTR}{CME} = \frac{10.5}{1.9} = 5.53$$

Los grados de libertad en el numerador son $k - 1 = 3 - 1 = 2$ y los grados de libertad en el denominador son $(k - 1)(b - 1) = (3 - 1)(6 - 1) = 10$. Como la prueba de hipótesis se rechaza sólo cuando los valores del estadístico de prueba son grandes, el valor-p es el área bajo la distribución F a la derecha de $F = 5.53$. En la tabla 4 del apéndice B se encuentra que para 2 y 10 grados de libertad, $F = 5.53$ se encuentra entre $F_{0.025} = 5.46$ y $F_{0.01} = 7.56$. Por tanto, el área en la cola superior, o valor-p, se encuentra entre 0.01 y 0.025. Se pueden usar también Excel o Minitab y encontrar que el valor-p exacto para $F = 5.53$ es 0.0241. Como el valor-$p \leq \alpha = 0.05$, se rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ y se concluye que las medias poblacionales de los niveles de estrés en las tres alternativas de puesto de trabajo no son iguales.

- *Suma de cuadrados* (Webster, 2003, p. 276-ss)

El reconocimiento de estas tres fuentes de variación permite la *división de la suma de cuadrados*, un procedimiento que es necesario para el análisis de varianza. Cada uno de los tres tipos de variación produce una suma de

cuadrados. Existe: 1) la suma de cuadrados total (*SCT*), 2) la suma de cuadrados de los tratamientos (*SCTR*), y 3) la suma de cuadrados del error (*SCE*). Como era de esperarse

$$SCT = SCTR + SCE$$

Esto ilustra que *SCT* puede dividirse en sus dos componentes: *SCTR* y *SCE.*

Se pueden utilizar estas sumas de cuadrados para probar la igualdad de las medias poblacionales. Vale la pena recordar del capítulo 3 que la varianza muestral se calcula así:

La siguiente tabla, será tomada en cuenta para realizar el ejemplo correspondiente al método de suma de cuadrados y de suma de cuadrados medios:

Tabla 10.1
Prueba del puntaje de los empleados

	Tratamientos		
	Programa 1	**Programa 2**	**Programa 3**
	85	80	82
	72	84	80
	83	81	85
	80	78	90
	**	82	88
Columna medias $\bar{X}_j$	$\bar{X}_1 = 80$	$\bar{X}_2 = 81$	$\bar{X}_3 = 85$

Varianza muestral

$$s^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

El numerador es la suma de los cuadrados de las desviaciones de la media. De esta forma, la suma de los cuadrados se utiliza para medir la variación. El denominador es el número de grados de libertad. Esta ecuación sirve como patrón que puede aplicarse a la suma de cuadrados en análisis de varianza.

Sea X_{ij} la observación *i*ésima en la muestra *j*ésima. Por ejemplo , X_{21} es la segunda observación en la primera muestra. En la tabla 10.1, $X_{21} = 72$, $X_{32} = 81$, $X_{43} = 90$, y así sucesivamente. Entonces,

Suma de cuadrados total

$$SCT = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$$

La gran media se le resta a cada una de las 14 observaciones. Las diferencias se elevan al cuadrado y se suman. Como lo muestra el signo de doble sumatoria en la fórmula (10.3), esto se hace a través de las filas y a través de todas las columnas. De allí en adelante la notación para los signos de sumatoria se elimina, en aras de la simplicidad. Utilizando los datos de la tabla 10.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} SCT &= (85 - 82.14)^2 + (72 - 82.14)^2 + (83 - 82.14)^2 \\ &\quad + (80 - 82.14)^2 + (80 - 82.14)^2 + (84 - 82.14)^2 \\ &\quad + \cdots (90 - 82.14)^2 + (88 - 82.14)^2 \\ &= 251.7 \end{aligned}$$

Debería notarse que *SCT* es simplemente la variación de las observaciones alrededor de la gran media.

Para la suma de cuadrados de los tratamientos se tiene que:

Suma de cuadrados de los tratamiento

$$SCTR = \Sigma r_j(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2$$

El número de observaciones o filas en cada tratamiento, r_j, se multiplica por las diferencias cuadradas entre la media de cada tratamiento, $\bar{X}_j$, y la gran media. Los resultados se suman para todos los tratamientos. La fórmula (10.4) pide que se multiplique el número de filas en la *j*ésima columna (vale la pena recordar que *j* denota una columna) por la desviación de la media elevada al cuadrado de dicha columna de la gran media. La tabla 10.1 da

$$\begin{aligned} SCTR &= 4(80 - 82.14)^2 + 5(81 - 82.14)^2 + 5(85 - 82.14)^2 \\ &= 65.7 \end{aligned}$$

SCTR refleja la variación en las medias de la columna alrededor de la gran media.

La suma de cuadrados del error se expresa como

Suma del cuadrado del error

$$SCE = \Sigma\Sigma(X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

La media de un tratamiento, $\bar{X}_j$, se resta de cada observación en dicho tratamiento. Las diferencias se elevan al cuadrado y se suman. Esto se hace para todos los tratamientos, y los resultados se suman. Utilizando los datos de la tabla 10.1 nuevamente, se tiene que

$$\begin{aligned} SCE &= (85 - 80)^2 + (72 - 80)^2 + (83 - 80)^2 + (80 - 80)^2 \\ &\quad \text{Para el primer tratamiento} \\ &\quad + (80 - 81)^2 + (84 - 81)^2 + (81 - 81)^2 + (78 - 81)^2 + (82 - 81)^2 \\ &\quad \text{Para el segundo tratamiento} \\ &\quad + (82 - 85)^2 + (80 - 85)^2 + (85 - 85)^2 + (90 - 85)^2 + (88 - 85)^2 \\ &\quad \text{Para el tercer tratamiento} \\ &= 186.0 \end{aligned}$$

SCE mide la variación aleatoria de los valores dentro de un tratamiento alrededor de su propia media.

Una revisión rápida de todos estos cálculos puede hacerse como

$$SCT = SCTR + SCE$$
$$251.7 = 65.7 + 186.0$$

Si se confía en la aritmética, se puede encontrar que SCE es simplemente

$$SCE = SCT - SCTR = 251.7 - 65.7 = 186.0$$

- *Cuadrados medios (*Webster, 2003, p. 278-ss)

Como lo dice la fórmula (10.2) para la varianza, después de obtener la suma de los cuadrados, cada una se divide por sus grados de libertad. Una suma de cuadrados dividida por sus grados de libertad produce un cuadrado medio. Es decir, si se divide una suma de cuadrados por sus grados de libertad, se obtiene un cuadrado medio.

En este aspecto, se nota que al calcular *SCT*, se utilizó todo el conjunto de datos de n observaciones para calcular un valor. Ese valor único era la gran media $\overline{\overline{X}}$, la cual representa una restricción. Por tanto *SCT* tiene $n - 1$ grados de libertad.

El cálculo de *SCTR* involucra el uso de $c = 3$ medias muestrales de las cuales se puede calcular la gran media. Las medias muestrales por tanto se ven como puntos de datos individuales y la gran media se toma como restricción. *SCTR* tiene entonces $c - 1$ grados de libertad.

Finalmente, se calculó *SCE* anteriormente sumando la desviación de $n = 14$ observaciones de $c = 3$ medias muestrales. Por tanto, *SCE* tiene $n - c$ grados de libertad.

Se nota que

$$\text{g.l. para } SCT = \text{g.l. para } SCTR + \text{g.l. para } SCE$$
$$n - 1 = c - 1 + n - c$$

Como se anotó anteriormente, debido a que la suma de cuadrados dividida por sus grados de libertad produce un cuadrado medio, se halla la media total de los cuadrados, o cuadrado medio total, *CMT*

Cuadrado medio total $$CMT = \frac{SCT}{n-1}$$

Cuadrado medio del tratamiento $$CMTR = \frac{SCTR}{c-1}$$

Cuadrado medio del error $$CME = \frac{SCE}{n-c}$$

Utilizando los datos de la tabla 10.1 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
CMT &= \frac{SCT}{n-1} \\
&= \frac{251.7}{14-1} \\
&= 19.4 \\
CMTR &= \frac{SCTR}{c-1} \\
&= \frac{65.7}{3-1} \\
&= 32.9 \\
CME &= \frac{SCE}{n-c} \\
&= \frac{186.0}{14-3} \\
&= 16.9
\end{aligned}
$$

Estos tres cuadrados medios están modelados a partir de la fórmula (10.2). Son sumas de los cuadrados divididas por sus grados de libertad, y como tales son varianzas. Es la razón de las dos últimas *CMTR* y *CME*, que se utiliza como base del análisis de varianza para probar la hipótesis respecto a la igualdad de las medias. Como se observó anteriormente, esta razón se ajusta a la distribución F, y se expresa como

Razón F para una prueba de medias

$$F = \frac{CMTR}{CME}$$

En el caso actual se vuelve

$$F = \frac{32.9}{16.9}$$
$$= 1.94$$

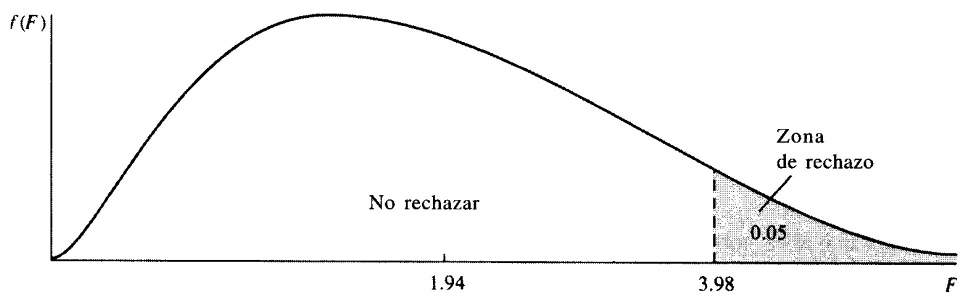
CMTR mide la variación entre tratamientos. Si los tratamientos tienen efectos diferentes, CMTR lo reflejará a través de su incremento. Entonces, la razón F en sí misma se incrementará. Por tanto, si la razón F se vuelve "significativamente" grande porque *CMTR* excede a *CME* por una cantidad grande, se reconoce que los efectos del tratamiento probablemente existen. Es probable que tratamientos diferentes tengan efectos diferentes en las medias de sus poblaciones respectivas, y podría rechazarse la hipótesis nula $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

El valor crítico de F que es considerado significativamente grande puede encontrarse en la tabla G (apéndice III) igual que antes. Se asume que el CEO desea probar las siguientes hipótesis a un nivel del 5%:

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_A\text{: No todas las medias son iguales}$$

Debido a que *CMTR* tiene $c - 1 = 3 - 1 = 2$ grados de libertad y *CME* tiene $n - c = 14 - 3 = 11$ grados de libertad, el valor crítico de F que se obtiene de la tabla es $F_{0.05,2,11} = 3.98$. El 2 se enumera antes del 11 al establecer los grados de libertad porque *CMTR* está en el numerador.

Figura 10.1
Los efectos de la capacitación



La regla de decisión representada en la figura 10.1 es

Regla de decisión: "No rechazar si $F \leq 3.98$. Rechazar la hipótesis nula si $F > 3.98$".

Debido a que se calculó que el valor F es de $1.94 < 3.98$, el CEO no debería rechazar la hipótesis nula. No puede rechazar a un nivel del 5% la hipótesis de que los puntajes de prueba promedio son los mismos para todos los tres programas de capacitación. No existe efecto significativo del tratamiento relacionado con alguno de los programas.

- *Tabla de análisis de varianza* (Webster, 2003, p. 278-ss)

Es habitual resumir los cálculos del análisis de varianza en una tabla. El formato general de la tabla de análisis de varianza aparece en la tabla 10.2 A), mientras que la tabla 10.2 B) contiene los valores específicos del ejemplo sobre el programa de capacitación.

Tabla 10.2

Una tabla ANOVA resume los cálculos del análisis de varianza

A. La tabla de análisis de varianza generalizada

Fuente de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Cuadrado medio**	**Valor *F***
Entre muestras (tratamiento)	*SCTR*	$c-1$	SCTR/(c - 1)	*CMTR/CME*
Dentro de muestras (error)	*SCE*	$n-c$	SCE/(n - c)	
Variación total	*SCT*	n -1		

B. Tabla de ANOVA para los programas de entrenamiento de empleados

Fuente de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Cuadrado medio**	**Valor *F***
Entre muestras (tratamiento)	65.7	2	32.9	1.94
Dentro de muestras (error)	186.0	11	16.9	
Variación total	251.7	13		

H_o: $\mu1 = \mu2 = \mu3$

H_A: No todas las medias son iguales

Regla de decisión: No rechazar si $F \leq 3.98$. Rechazar si $F > 3.98$.

Conclusión: Ya que $F = 1.94 < 3.98$, no se rechaza la hipótesis nula.

Pruebas para la diferencias entre pares de medias con diseños balanceados y no balanceados.(Webster, 2003, p. 280-ss)

cuando se rechaza la hipótesis nula, el análisis de varianza no revela cuál(es) media(s) es (son) diferentes del resto. Se deben utilizar otras pruebas estadísticas para tomar esta determinación. Estas pruebas consisten en una comparación por pares, de todos los pares de medias posibles. Si el valor absoluto (ignorando los signos) de la diferencia entre dos medias muestrales cualquiera es mayor que algún estándar, se observa como una diferencia significativa, y se concluye que las medias poblacionales respectivas son diferentes.

Se puede determinar este estándar debido a una diversidad de procedimientos estadísticos incluyendo el método de Tukey (Too'Key) y la diferencia mínima significativa (*DMS*).

DISEÑOS BALANCEADOS

Diseños ANOVA En un diseño de análisis de varianza balanceado, cada muestra tiene el mismo número de observaciones. Si una o más muestras tienen un número diferente de observaciones, se dice que el diseño no está balanceado.

Criterio de Tukey para comparaciones por pares

$$T = q_{\alpha,c,n-c}\sqrt{\frac{CME}{r}}$$

en donde q tiene una **distribución de rangos estudentizada** con c y $n - c$ grados de libertad y α es el valor α seleccionado. Vale la pena recordar que c es el número de muestras o tratamientos (columnas), y n es el número total de observaciones en todas las muestras combinadas.

Diferencia mínima significativa El método de diferencia mínima significativa es muy similar al método de Tukey. Compara el criterio de la diferencia menos significativa con la diferencia absoluta en las medias muestrales.

Si el diseño está balanceado, el criterio DMS es:

Diferencia mínima significativa

$$DMS = \sqrt{\frac{2(CME)F_{\alpha,1,n-c}}{r}}$$

DISEÑOS NO BALANCEADOS

Método *DMS* alternativo Para comparar las muestras *jésima* y *késima*, la ecuación para DMS se vuelve:

Diferencia mínima significativa para el diseño no balanceado

$$DMS_{j,k} = \sqrt{\left[\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}\right](CME)F_{\alpha,c-1,n-c}}$$

en donde r_j es el número de observaciones en la muestra *jésima* y r_k es el número de observaciones en la muestra *késima*. El valor *DMS* será diferente para cada par de comparaciones por pares, debido a que el número de observaciones no es el mismo en cada muestra.

- *Análisis factorial (Anderson 2008)*

Los diseños de experimentos vistos hasta ahora permiten obtener conclusiones estadísticas acerca de un solo factor. Sin embargo, en algunos experimentos se desean obtener conclusiones acerca de más de un factor o variable. Un **experimento factorial** es un diseño experimental que permite obtener, simultáneamente, conclusiones acerca de dos o más factores. El término *factorial* se emplea debido a que las condiciones experimentales comprenden todas las posibles combinaciones de los factores. Por ejemplo, si se tienen a niveles del factor A y b niveles del factor B, se obtendrán datos de ab combinaciones de tratamientos. En esta sección se verá un experimento factorial para dos factores. La idea básica se extiende a experimentos factoriales con más de dos factores.

Para ilustrar los experimentos factoriales para dos factores, se considerará un estudio realizado en relación con un examen de admisión para estudiantes con licenciatura que desean hacer un estudio sobre administración de negocios. Las puntuaciones que se pueden obtener en este examen de admisión van de 200 a 800, las puntuaciones más altas reflejan mejores aptitudes para el estudio en el futuro.

Como ayuda para la preparación de este examen, una institución ofrece los tres programas siguientes.

1. Una sesión de repaso de tres horas, en la que se revisa el tipo de preguntas que suelen encontrarse en el examen.
2. Un programa de un día en el que se ve el material más importante que se necesita saber para el examen y se hace un examen muestra que es incluso calificado.
3. Un curso intensivo de diez semanas en el que se determinan las debilidades de cada estudiante y se establece un programa individualizado para superar esas debilidades.

Por tanto, un factor en este estudio es el programa de preparación para el examen de admisión. Para este factor hay tres tratamientos: un repaso de tres horas, un programa de un día y un curso de 10 semanas. Se quiere determinar el efecto de cada uno de los programas sobre las puntuaciones obtenidas en este examen de admisión.

Por lo común este examen lo hacen estudiantes de tres licenciaturas, administración, ingeniería y ciencias. En consecuencia, el segundo factor que interesa en este estudio es si la licenciatura del estudiante influye en la calificación en el examen de admisión. Para este segundo factor hay también tres tratamientos, administración, ingeniería y ciencias. En el diseño factorial de este experimento en el que hay tres tratamientos para el factor A, programa de preparación, y tres tratamientos

para el factor B, tipo de licenciatura, habrá en total $3 \times 3 = 9$ combinaciones de tratamientos. En la tabla 13 9 se resumen estas combinaciones de tratamientos o condiciones experimentales.

Suponga que se toma una muestra de dos estudiantes para cada una de las combinaciones de tratamientos de la tabla 13.9: dos estudiantes de administración participarán en el repaso de tres horas, dos participarán en el programa de un día y dos participarán en el curso de 10 semanas. Además, dos estudiantes de ingeniería y dos estudiantes de ciencias participarán en cada uno de los tres programas. En la terminología del diseño de experimentos, el tamaño muestral de dos para cada combinación de tratamientos indica que se tienen dos replicaciones. Se pueden usar también más replicaciones y tamaños muestrales mayores, pero en esta aplicación se quisieron minimizar los cálculos para hacer más claro este ejemplo.

TABLA 13.9 LAS NUEVE COMBINACIONES DE TRATAMIENTOS EN EL EXPERIMENTO CON DOS FACTORES DEL EXAMEN DE ADMISIÓN

		Factor B: licenciatura		
		Administración	**Ingeniería**	**Ciencias**
Factor A: programa de preparación	**Repaso de tres horas**	1	2	3
	Programa de un día	4	5	6
	Curso de 10 semanas	7	8	9

En este diseño experimental se requiere que de *cada una* de las licenciaturas (administración, ingeniería y ciencias) se tomen aleatoriamente seis estudiantes que pretendan realizar este examen de admisión y, que después, dos estudiantes de cada licenciatura sean asignados de manera aleatoria a cada uno de los programas de preparación para el examen, con lo que en total participan 18 estudiantes en este estudio.

En la tabla 13.10 se presentan las puntuaciones obtenidas en el examen por estos estudiantes después de haber participado en los programas de preparación para el examen.

Los cálculos para el análisis de varianza con los datos de la tabla 13.10 permitirán responder las preguntas siguientes:

- **Efecto principal (factor A):** ¿Tienen los programas de preparación efectos diferentes sobre la puntuación obtenida en el examen de admisión?
- **Efecto principal (factor B):** ¿Tienen las licenciaturas efectos diferentes sobre la puntuación obtenida en el examen de admisión?
- **Efecto de interacción (factor A y B):** ¿Es uno de los programas de preparación mejor para los estudiantes que vienen de una de las tres licenciaturas, mientras que para los de otras licenciaturas es mejor otro de los programas?

El término **interacción** se refiere a un nuevo efecto que es posible estudiar debido a que se emplea un experimento factorial. Si el efecto interacción tiene algún impacto significante sobre

las puntuaciones del examen de admisión, se podrá concluir que el efecto del tipo de programa de preparación depende de la licenciatura

TABLA 13.10 PUNTUACIONES EN EL EXAMEN DE ADMISIÓN DEL EXPERIMENTO DE DOS FACTORES

		Factor B: licenciatura		
		Administración	**Ingeniería**	**Ciencias**
Factor A: programa de preparación	**Repaso de tres horas**	500 580	540 460	480 400
	Programa de un día	460 540	560 620	420 480
	Curso de 10 semanas	560 600	600 580	480 410

TABLA 13.11 TABLA ANOVA PARA EL EXPERIMENTO FACTORIAL DE DOS FACTORES CON r REPLICACIONES

Fuente de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Cuadrado medio**	***F***	**Valor-*p***
Factor A	SCA	$a-1$	$CMA = \frac{SCA}{a-1}$	$\frac{CMA}{CME}$	
Factor B	SCB	$b-1$	$CMB = \frac{SCB}{b-1}$	$\frac{CMB}{CME}$	
Interacción	SCAB	$(a-1)(b-1)$	$CMAB = \frac{SCAB}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{CMAB}{CME}$	
Error	SCE	$ab(r-1)$	$CME = \frac{SCE}{ab(r-1)}$		
Total	STC	$n_T - 1$			

- *Diseño en cuadrado latino (Webstern, 2003, p. 302, ss)*

Este diseño de bloques permite hacer bloques en dos variables extrañas al mismo tiempo. Se tienen dos variables sobre las cuales se desean hacer bloques. Se quiere eliminar la influencia de dos elementos exteriores para capturar una verdadera y precisa impresión de la capacidad del sistema real. El esquema experimental apropiado es el Diseño de cuadrado latino.

Una de las variables del bloque se asigna a las filas y la segunda a las columnas. Los tratamientos se organizan para que ocurran una vez en cada fila y en cada columna. Por consiguiente, el número de filas, el número de columnas y el número de tratamientos deben ser todos el mismo.

Diseño en cuadrado latino Se utiliza cuando se desea bloquear el efecto exterior de dos variables que pueden producir resultados equívocos.

El diseño en cuadrado latino permite al investigador obtener más información con una muestra más pequeña, ya que elimina la variación exterior haciendo el bloqueo en dos variables. A diferencia del análisis factorial, el diseño en cuadrado latino contiene sólo un elemento por tratamiento y por celda.

Como se acaba de expresar, si hay r tratamientos en consideración, se debe tener r niveles para cada una de las variables de bloqueo. Por consiguiente, se tiene $r \times r = r^2$ elementos, lo que sugiere el término *cuadrado*. El diseño se denomina *cuadrado latino* porque las letras latinas como A, B y C se utilizan para denotar los tratamientos.

Debido a que hay tres sistemas de computación que se desea probar, ahora se seleccionarán tres empleados para que trabajen en cada sistema durante cada uno de los tres períodos. Se tienen tres tratamientos (sistemas de computación) y tres niveles para cada bloque: es decir, tres niveles de experiencia y tres períodos de tiempo. Se dice que se tiene cuadrado latino 3 X 3. Los tres sistemas de computación (tratamientos) se identificarán como A, B, y C. Cada tratamiento aparecerá en todas las filas y columnas del cuadrado.

Ahora se debe dividir las sumas de los cuadrados entre las filas, las columnas y los tratamientos. Esto se logra utilizando el siguiente conjunto de fórmulas. La suma de cuadrados del bloque de filas (*SCBF*) se halla:

Suma de cuadrados del bloque de filas

$$SCBF = \frac{\Sigma(\text{ suma de fila })^2}{r} - \frac{(\Sigma X_i)^2}{r^2}$$

en donde (suma de fila) es la suma de cada fila

r es el número de tratamientos

X_i es cada una de las observaciones

La suma de los cuadrados del bloque de columnas (*SCBC*) es:

Suma de cuadrados del bloque de columnas

$$SCBC = \frac{\Sigma(\text{ suma de columna})^2}{r} - \frac{(\Sigma X_i)^2}{r^2}$$

en donde (suma de columna) es la suma de cada columna

La suma de cuadrados del tratamiento (*SCTR*) es

Suma de cuadrados del tratamiento

$$SCTR = \frac{\Sigma(\text{suma } TRT_i)^2}{r} - \frac{(\Sigma X_i)^2}{r^2}$$

en donde (suma TRT_i) es la suma de cada uno de los tratamientos A, B y C.

La suma de cuadrados total es:

Suma de cuadrados total

$$SCT = \Sigma(X_i)^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{r^2}$$

donde $(X_i)^2$ es el cuadrado de los nueve valores de producción. Por último, para la suma del cuadrado del error se tiene que:

Suma del cuadrado del error $$SCE = SCT - SCTR - SCBC - SCBF$$

CORRELACIÓN Y REGRESIÓN LINEAL SIMPLE Y MÚLTIPLE

- *Determinación del modelo de regresión lineal simple. (Anderson,2008, CAPITULO 14)*
- *Mínimos cuadrados ordinarios. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Supuestos del modelo de regresión lineal. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Error estándar de estimación. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Análisis de correlación. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Pruebas para los parámetros poblacionales. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Intervalos de confianza en el análisis de regresión (Anderson, 2008, CAPITULO 14).*
- *Análisis de varianza en la regresión. (Anderson, 2008, CAPITULO 14)*
- *Regresión múltiple y ecuaciones. ((Anderson, 2008, CAPITULO 15)*

BIBLIOGRAFÍA:

Anderson, D. Dennis, J., Sweenwy y Thomas, W. (2008). Estadística para Administración y Economía. (10ª Edición). México: Cengage Learning.

Webster, L. (2001). Estadística aplicada a los negocios *y la economía*. (Tercera Edición). Colombia. Mc Graw Hill.