ÁLGEBRA MATRICIAL

ÁLGEBRA MATRICIAL

Una matriz es un arreglo rectangular de números, distribuidos en filas y columnas, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 5 & 8 \\ 9 & 17 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

La cantidad de filas y columnas de una matriz determinan su tamaño. Es frecuente que se usen los términos orden o dimensión para referirse al tamaño de una matriz.

En el ejemplo 1, la matriz A tiene 3 filas y 4 columnas, por lo que se dice que A es una matriz de orden $3{\times}4$, o que la dimensión de A es $3{\times}4$. No debe confundirse con una matriz de dimensión $4{\times}3$ (4 filas y 3 columnas).

Cada uno de los números en la matriz se denomina elemento o entrada de la matriz.

En el ejemplo 1, el número 5 es el elemento de la matriz A que se ubica en la fila 2 y la columna 3; por lo que se dice que 5 es la entrada 2,3 de la matriz A. Simbólicamente esto se escribe en la forma: $\langle A \rangle_{2,3}$ = 5

El conjunto de todas las matrices de orden $n{\times}m$ (matrices con n filas y m columnas) se denota mediante el símbolo $M_{n\times m}$.

Es común que en diversos contextos se empleen tablas para resumir y presentar datos numéricos de varios tipos. En una estación de combustibles se pueden emplear para registrar el número litros de cada tipo de combustible que se venden diariamente, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Día	Número de litros de combustible vendidos		
	Diesel	Gasolina	Gasolina Súper
Lunes	14 437	19 654	12 351
Martes	12 145	21 927	18 978
Miércoles	11 358	19 256	20 176
Jueves	14 259	18 623	16 283
Viernes	13 272	21 925	18 250
Sábado	14 378	21 963	18 743
Domingo	16 492	22 730	20 007

Si se tiene claro que en cada una de las filas se muestran las ventas diarias de cada tipo de combustible, y se conoce el orden de las columnas (diesel, gasolina y gasoline super), la tabla anterior puede reducirse a un arreglo matricial equivalente, como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 14\,437 & 19\,654 & 12\,351 \\ 12\,145 & 21\,927 & 18\,978 \\ 11\,358 & 19\,256 & 20\,176 \\ 14\,259 & 18\,623 & 16\,283 \\ 13\,272 & 21\,925 & 18\,250 \\ 14\,378 & 21\,963 & 18\,743 \\ 16\,492 & 22\,730 & 20\,007 \end{pmatrix}$$

Además de emplearse para la representación y manipulación de datos, las matrices tienen importantes usos en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, en las ciencias sociales, las ingenierías, la economía, la física, la estadística y en multiples ramas de las matemáticas entre las que se destacan las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y, por supuesto, el álgebra.

OPERACIONES CON MATRICES.

Existen diversas operaciones que pueden efectuarse con matrices, tales como la suma y multiplicación de matrices y el producto por escalar.

Suma y resta de matrices

Para sumar o restar dos o más matrices es necesario que estas sean del mismo tamaño, es decir, deben tener el mismo orden (mismo número de filas y de columnas). En tal caso, la suma o resta se realiza entrada por entrada, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\ -2 & 4+5 & 2+9 \\ 7+8 & -3+3 & 0+\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\ -2 & 4-5 & 2-9 \\ 7-8 & -3-3 & 0-\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

Las siguientes tablas muestran las ventas de una empresa de autos, por marca y tipo de transmisión, durante los dos semestres del año 2016.

Ventas del I Semestre, 2016

Marca	Manual	Automático
Toyota	5	7
Ford	8	6
Nissan	6	12
Suzuki	4	9
Isuzu	3	1

Ventas del II Semestre, 2016

Marca	Manual	Automático
Toyota	7	3
Ford	5	4
Nissan	5	5
Suzuki	2	5
Isuzu	3	8

La suma de matrices puede emplearse para calcular la cantidad de autos vendidos en el año 2016 por la empresa, por marca y tipo de transmisión.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 6 \\ 6 & 12 \\ 4 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 13 & 10 \\ 11 & 17 \\ 6 & 14 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ventas durante el 2016

Marca	Manual	Automático
Toyota	12	10
Ford	13	10
Nissan	11	17
Suzuki	6	14
Isuzu	6	9

Producto por escalar

El término “escalar” se emplea acá, como sinónimo de número real. Multiplicar una matriz por un escalar, es equivalente a multiplicar la matriz por un número real. Para calcular el resultado únicamente debe multiplicarse cada entrada de la matriz por el número real, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot -6 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 63 \\ 14 & -42 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6

En la siguiente tabla se muestran los precios en dólares ($1 ≈ ₡550) de los hospedajes (por noche) en diversos tipos de habitación en cuatro hoteles, para la temporada de vacaciones 2016-2017.

Hotel	Habitación sencilla	Habitación doble	Habitación familiar
Hotel 1	40	70	100
Hotel 2	45	82	110
Hotel 3	39	50	100
Hotel 4	53	90	120

La multiplicación de la matriz con la información respectiva por el escalar 550 da una nueva matriz con los datos de los precios en colones de cada tipo de habitación

$$550 \cdot \begin{pmatrix} 40 & 70 & 100 \\ 45 & 82 & 110 \\ 39 & 50 & 100 \\ 53 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\,000 & 38\,500 & 55\,000 \\ 24\,750 & 45\,100 & 60\,500 \\ 21\,450 & 27\,500 & 55\,000 \\ 29\,150 & 49\,500 & 66\,000 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices

La multiplicación de matrices solo es posible cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. El resultado de la multiplicación será una nueva matriz que tendrá tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda matriz. Simbólicamente se tiene que si $A \in M_{m\times r}$ y $B \in M_{r\times n}$ entonces $A \cdot B \in M_{m\times n}$

El proceso de multiplicación se realiza tal como se ve en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{3\ columnas} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\ filas} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 5\cdot 3 + 7\cdot 1 \\ -8\cdot 0 + 6\cdot 3 + 9\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+15+7 \\ 0+18+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 2 + -2 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + -2 \cdot 8 & 5 \cdot 1 + -2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + -1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + -1 \cdot 8 & 1 \cdot 1 + -1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 8 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 + 3 & 0 + 8 & 0 + 5 \\ 10 - 6 & 0 - 16 & 5 - 10 \\ 2 - 3 & 0 - 8 & 1 - 5 \\ 6 + 0 & 0 + 0 & 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & -16 & -5 \\ -1 & -8 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En los ejemplos anteriores puede verse que al multiplicar dos matrices se obtiene como resultado una nueva matriz. La entrada que se ubica en la fila i y la columna j de la nueva matriz se obtiene al sumar los resultados de multiplicar las entradas respectivas de la fila i de la primera matriz por las entradas correspondientes de la columna j de la segunda matriz.

Más adelante se verá una aplicación de la multiplicación de matrices en la solución de sistemas de ecuaciones.

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILA

Existen tres tipos de operaciones que pueden efectuarse sobre las filas de las matrices. Se denominan **operaciones elementales por fila** o simplemente **operaciones elementales**. A continuación se detalla cada una de estas operaciones.

Intercambio de filas

Consiste en intercambiar la posición de dos filas cualesquiera de la matriz.

Ejemplo 9

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{\begin{array}{c} \textit{La operación } f_2 \leftrightarrow f_3 \textit{ indica que se debe} \\ \textit{intercambiar la fila } 2 \textit{ con la fila } 3 \textit{ de} \\ \textit{la matriz de la izquierda. Se obtiene} \\ \textit{como resultado la matriz de la derecha} \end{array}}$$

Suma o resta de filas

Consiste en sumar o restar entrada por entrada los elementos de dos filas cualesquiera de la matriz.

Ejemplo 10

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 1 \\ 9 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - f_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5-0 & 8-3 & 1-8 \\ 9 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{\begin{array}{c} \textit{La operación } f_2 - f_4 \textit{ indica que a cada elemento de la} \\ \textit{fila } 2 \textit{ se le resta el elemento correspondiente de la} \\ \textit{fila } 4. \textit{ El resultado se computa en la fila } 2 \textit{ de la} \\ \textit{matriz resultante, mientras que la fila } 4 \textit{ de esa} \\ \textit{matriz no sufrirá ningún cambio.} \\ \textit{La operación } f_4 - f_2 \textit{ se computaría en la fila } 4. \end{array}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & -7 \\ 9 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una fila por un escalar

Consiste en multiplicar cada uno de los elementos de una fila de la matriz, por un escalar dado.

Ejemplo 11

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 9 & 34 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 90 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \cdot f_1]{} \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 8\cdot 3 & 1\cdot 3 & 4\cdot 3 & 7\cdot 3 \\ 7 & 9 & 34 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 24 & 3 & 12 & 21 \\ 7 & 9 & 34 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 90 \end{pmatrix}$$

En algunas ocasiones es conveniente combinar la suma o resta de filas con la multiplicación de un escalar en una única operación, tal como se muestra a continuación.

Ejemplo 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_1+6f_2]{} \begin{pmatrix} 2\cdot 1+6\cdot 5 & 2\cdot 4+6\cdot 7 & 2\cdot 3+6\cdot 9 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2+30 & 8+42 & 6+54 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 50 & 60 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Se dice que una matriz está en su forma **reducida** si satisface las siguientes condiciones:

- ✓ Si una fila no consiste solamente de ceros, entonces la primera entrada diferente de cero de esa fila, es 1.

  Nota: La primera entrada diferente de cero de una fila se denomina **entrada principal de la fila**.
- ✓ En cada columna en la que aparece un 1 como entrada principal, los demás elementos son ceros.
- ✓ En cada fila, la primera entrada diferente de cero está a la derecha de la primera entrada diferente de cero de las filas superiores.
- ✓ Si existe una o más filas que contienen únicamente ceros, estas se ubican en la parte inferior de la matriz, de tal forma que no hayan filas distintas de cero, por debajo de una fila de ceros.

En el siguiente ejemplo se muestra una matriz en su forma reducida:

Ejemplo 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si una matriz no se encuentra en su forma reducida, siempre es posible reducirla mediante la aplicación de operaciones elementales por fila. Considere la matriz no reducida A que se muestra a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Para reducir la matriz progresivamente, es conveniente seguir un orden columna por columna. Primero se verifica si en la columna 1 existe algún elemento distinto de cero que sea entrada principal de alguna fila. En la matriz anterior, la columna 1 contiene dos elementos distintos de cero y ambos son la entrada principal de su respectiva fila.

El primero de los elementos de la columna 1 que es distinto de cero es el número tres que se ubica en la fila 2. Ahora se intercambia la fila dos con la fila uno, para lograr que el primer elemento distinto de cero se ubique en la primera fila.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix} \overrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Como la entrada principal de la primera fila de la nueva matriz es distinta de 1, se debe efectuar alguna operación para lograr transformarla en 1. Una posibilidad es multiplicar la fila 1 por 1/3.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix} \overrightarrow{\frac{1}{3} \cdot f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Se debe lograr que el resto de entradas en la primera columna sean cero. En el caso anterior, la tercera entrada de la columna 1 es diferente de 0, por lo que debe aplicarse alguna operación elemental para transformarla en cero. En este caso si a la fila 3 se le resta 6 veces la fila 1, se obtiene el cero buscado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 6f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6-6\cdot 1 & -12-6\cdot -2 & 2-6\cdot -1 & 11-6\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6-6 & -12+12 & 2+6 & 11-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Hasta el momento se ha logrado que la entrada principal de la fila 1 sea un 1 (ubicado en la columna 1) y que el resto de elementos de la columna 1 sean ceros. Ahora, se observa la columna 2 para verificar si existe en ella algún elemento distinto de cero que sea entrada principal de alguna fila. En el caso anterior, el único elemento de la columna 2 que es distinto de cero se ubica en la primera fila, pero no es la entrada principal de dicha fila, por lo que se mantiene esa columna tal como está.

Ahora se chequea la columna 3 para verificar si existe en ella algún elemento distinto de cero que sea entrada principal de alguna fila. En el caso anterior, todos los elementos de la columna 3 son diferentes de cero, pero solo la segunda y la tercera entrada de dicha columna son entradas principales de sus respectivas filas. En la tercera columna, la entrada que se encuentra en la fila 2 es un 1, por lo que únicamente se debe hacer cero el resto de entradas en dicha columna, para lo que pueden efectuarse las siguientes operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 8\cdot f_2]{f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1+1 & 0+2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8-8\cdot 1 & 11-8\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Si se observa la cuarta columna en busca de elementos que sean entrada principal de alguna fila, se encuentra que solo el número -5 que se ubica en la tercera fila es entrada principal, por lo que debe aplicarse una operación elemental que lo convierta en 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{5}\cdot f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para terminar, únicamente es necesario hacer ceros los elementos que se ubican en las posiciones 1,4 y 2,4 de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - 2 \cdot f_3]{f_1 - 2 \cdot f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz representa la forma reducida de la matriz original.

La reducción de matrices es un método que puede emplearse para resolver sistemas de ecuaciones, tal como se ve en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 14

La familia Gómez ha iniciado un negocio de producción y venta artesanal de café. Hasta el momento cuentan con tres tipos de café, que empacan en bolsas de 500 g. El lunes de la semana pasada vendieron 15 paquetes de café de tipo A, 45 paquetes de café de tipo B y 30 paquetes de café de tipo C. Al día siguiente vendieron 27 paquetes de café de tipo A, 25 paquetes de café de tipo B y 26 paquetes de café de tipo C. El miércoles de la semana pasada vendieron 11 paquetes de café de tipo A, 32 paquetes de café de tipo B y 30 paquetes de café de tipo C. Los ingresos que percibieron por las ventas totales los días lunes, martes y miércoles fueron ₡ 196 500 , ₡ 173 800 y ₡ 159 800, respectivamente. Se desea determinar el precio de una bolsa de cada tipo de café.

La información anterior se puede representar en forma tabular y mediante un sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

	Total de paquetes vendidos			**Ingresos**
Día	Tipo A	Tipo B	Tipo C	**totales**
Lunes	15	45	30	196 500
Martes	27	25	26	173 800
Miércoles	11	32	30	159 800

$$\begin{cases} 15x + 45y + 30z = 196\,500 \\ 27x + 25y + 26z = 173\,800 \\ 11x + 32y + 30z = 159\,800 \end{cases}$$

Donde x representa el precio de cada paquete de café de tipo A

y representa el precio de cada paquete de café de tipo B

z representa el precio de cada paquete de café de tipo C

Para resolver el sistema es conveniente reescribirlo en forma matricial, tal como se muestra a continuación.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 45 & 30 \\ 27 & 25 & 26 \\ 11 & 32 & 30 \end{pmatrix}}_{Matriz\ de\ coeficientes} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 196\,500 \\ 173\,800 \\ 159\,800 \end{pmatrix}}_{\substack{Columna\ de \\ soluciones}}$$

$$\begin{pmatrix} 15x + 45y + 30z \\ 27x + 25y + 26z \\ 11x + 32y + 30z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196\,500 \\ 173\,800 \\ 159\,800 \end{pmatrix}$$

Observe que al multiplicar la **matriz de coeficientes** por la columna de variables, se obtiene el lado izquierdo del sistema de ecuaciones. El sistema anterior, también puede representarse mediante una **matriz aumentada** o **matriz ampliada**, en la que de tal forma que los coeficientes de cada una de las ecuaciones se escriben como entradas de la matriz principal, a la que se adjunta como columna adicional la columna de soluciones (la que contiene los datos de los ingresos). Precisamente por tener esa columna adicional, la matriz resultante se denomina **matriz aumentada** o **matriz ampliada** del sistema.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 15 & 45 & 30 \\ 27 & 25 & 26 \\ 11 & 32 & 30 \end{matrix}}_{Matriz\ principal} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 196\,500 \\ 173\,800 \\ 159\,800 \end{matrix}}_{\substack{Columna\ de \\ soluciones}}\right)$$

El sistema puede resolverse mediante el proceso de reducción de matrices, con el cuidado adicional de aplicar cada operación elemental, tanto a la matriz principal, como a la columna adicional que se agregó a la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 45 & 30 & 196\,500 \\ 27 & 25 & 26 & 173\,800 \\ 11 & 32 & 30 & 159\,800 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{15}\cdot f_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 13\,100 \\ 27 & 25 & 26 & 173\,800 \\ 11 & 32 & 30 & 159\,800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3-11f_1]{f_2-27f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 13\,100 \\ 0 & -56 & -28 & -179\,900 \\ 0 & -1 & 8 & 15\,700 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{-56}\cdot f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 13\,100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6425}{2} \\ 0 & -1 & 8 & 15\,700 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1+3f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & 60\,200 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6425}{2} \\ 0 & -1 & 8 & 15\,700 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & 60\,200 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6425}{2} \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{37\,825}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{2}{17}\cdot f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & 60\,200 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6425}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2225 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2-\frac{1}{2}\cdot f_3]{f_1-26\cdot f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2350 \\ 0 & 1 & 0 & 2100 \\ 0 & 0 & 1 & 2225 \end{array}\right)$$

Si esta última matriz se reescribe en la forma de un sistema de ecuaciones se tiene que:

$$\begin{cases} 1x = 2350 \\ 1y = 2100 \\ 1z = 2225 \end{cases}$$

Con lo que se ha resuelto el sistema original. Cada paquete del tipo A cuesta ¢2350, cada paquete del tipo B cuesta ¢2100 y cada paquete del tipo C cuesta ¢2225. Se dice entonces que el sistema tiene solución única, pues las tres ecuaciones del sistema se satisfacen simultáneamente solo cuando $x = 2350$, $y = 2100$, $z = 2225$.

Si la forma reducida de la matriz ampliada del sistema posee una fila de ceros en la matriz principal y la posición respectiva en la columna de soluciones es distinta de cero, entonces el sistema no tiene solución.

La matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ es un ejemplo de una matriz ampliada, llevada a su forma reducida, correspondiente a un sistema de ecuaciones sin solución. El sistema no tiene solución, pues la última fila de la matriz principal es una fila de ceros, pero la última entrada de la columna de soluciones es distinta de cero.

Existen otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación se estudiarán dos métodos que se aplican únicamente cuando la matriz principal asociada a un sistema de ecuaciones tiene tantas filas como columnas, en cuyo caso se dirá que la matriz es **cuadrada**.

□ MATRICES INVERSAS

Se dice que una matriz cuadrada es **invertible** cuando su forma reducida corresponde a una matriz que tiene únicamente unos en la diagonal. La matriz reducida que tiene solo unos en la diagonal se denomina **matriz identidad** y se simboliza I_n , donde el subíndice n indica el número de filas de la matriz identidad.

Si una matriz cuadrada A con n filas es invertible, su inversa es otra matriz cuadrada del mismo orden (n filas y n columnas), que se denota con el símbolo A^{-1} y que cumple que $A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1}$.

Ejemplo 15

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 - f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - 2f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \cdot f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 - 3f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Dado que la forma reducida de A es la matriz identidad (únicamente tiene unos en la diagonal), se comprueba que la matriz A es invertible.

Es fácil probar que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ puesto que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

A continuación se estudiará un método para calcular la inversa de una matriz. Para esto se usará una especie de matriz ampliada, adjuntando a la matriz A la matriz identidad del mismo orden, y efectuando sobre ambas, las operaciones elementales que permitan reducir la matriz A, tal como se detalla a continuación:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 - f_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 - 2f_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1 \cdot f_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 - 3f_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$$

Observe que para reducir la matriz A se usaron las mismas operaciones elementales que en el ejemplo 15. Al aplicar las mismas operaciones a la matriz aumentada se logró calcular la matriz A^{-1}.

El método anterior puede emplearse para calcular la inversa de matrices de mayor tamaño.

Ejemplo 16

Sea M=$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Para calcular M^{-1} se empleará el proceso visto anteriormente

$$(M|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 5f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 - 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 1 \end{array}\right) = (I_3|M^{-1})$$

Así, la inversa de M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

Las matrices inversas pueden aplicarse para la solución de sistemas de ecuaciones con n filas y n columnas, tal como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17

Se desea resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 7y = 125 \\ x + 4y = 70 \\ 5y + z = 105 \end{cases}$

La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 70 \\ 105 \end{pmatrix}$ (*)

Observe que la matriz de coeficientes del sistema es la matriz M del ejemplo 16. La inversa de esa matriz es $M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

Si esa matriz se multiplica a ambos lados de (*) se tiene

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 125 \\ 70 \\ 105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

De donde se tiene la solución del sistema x=10, y=15, z=30

DETERMINANTES Y REGLA DE CRAMER

El último método que se estudiará para resolver sistemas de ecuaciones con n filas y n columnas, se denomina Regla de Cramer. Este método depende del concepto de **determinante** de una matriz.

El determinante de una matriz cuadrada A cuyas entradas son números reales, es un número real asociado a dicha matriz, y que se denota con el símbolo $|A|$.

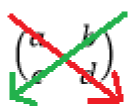
Si bien es posible calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada, en el caso de matrices 2x2 y 3x3, el determinante toma una forma particularmente simple. Precisamente se estudiará el determinante de este tipo de matrices cuadradas.

Determinantes de matrices 2x2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con entradas reales, su determinante es el número:

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Una forma sencilla de recordar la definición de determinante de una matriz 2x2 es mediante el esquema



Ejemplo 18

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ entonces $|A| = 2 \cdot 9 - (3 \cdot -5) = 18 - -15 = 18 + 15 = 33$

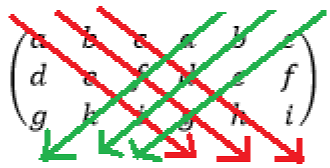
Determinantes de matrices 3x3

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ con entradas reales, su determinante es el número:

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Una forma sencilla de recordar la definición de determinante de una matriz 3x3 es mediante el esquema:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}\right)$$



Ejemplo 19

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

entonces $|A| = (2 \cdot -2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3) - (4 \cdot -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 3) =$

$$(-24 + 0 + 36) - (-8 + 18 + 0) = 12 - 10 = 2$$

Regla de Cramer

Si se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ en las variables $x,\ y$ la Regla de Cramer establece que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{rd - sb}{ad - cb} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{as - cr}{ad - cb}$$

Observe que en ambos casos, el determinante que se ubica en el denominador de la fracción, es el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, mientras que el determinante en el numerador de la fracción se obtiene al cambiar la columna de soluciones por la columna de los coeficientes de la variable a resolver.

En el caso de sistemas con tres ecuaciones y tres variables, la regla de Cramer es equivalente a la anterior.

Ejemplo 20
Se desea resolver con la regla de Cramer el sistema de ecuaciones del ejemplo 17

$$\begin{cases} 2x + 7y = 125 \\ x + 4y = 70 \\ 5y + z = 105 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

La regla de Cramer indica que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 125 & 7 & 0 \\ 70 & 4 & 0 \\ 105 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(500 + 0 + 0) - (0 + 490 + 0)}{(8 + 0 + 0) - (0 + 7 + 0)} = \frac{500 - 490}{8 - 7} = 10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 125 & 0 \\ 1 & 70 & 0 \\ 0 & 105 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(140 + 0 + 0) - (0 + 125 + 0)}{(8 + 0 + 0) - (0 + 7 + 0)} = \frac{140 - 125}{8 - 7} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 125 \\ 1 & 4 & 70 \\ 0 & 5 & 105 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(840 + 0 + 625) - (0 + 735 + 700)}{(8 + 0 + 0) - (0 + 7 + 0)} = \frac{1465 - 1435}{8 - 7} = 30$$