MÁS SOBRE DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES

□ DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Al igual que en las funciones de una variable en las que se puede calcular la primera, segunda, tercera, n-ésima derivada, también en las funciones de varias variables se puede determinar derivadas de orden superior.

Urbán, R (s.f, p.23), indica que la derivada de primer orden de una función $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$se denotan de la siguiente forma con respeto a x_n:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Estas derivadas pueden derivarse nuevamente, lo que se llamaría derivada parcial de segundo orden, que a su vez puede derivarse nuevamente y así sucesivamente. Las derivadas de segundo orden se denotarían de la siguiente forma respecto a x_1:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots$$

Con respecto a la variable x_2 la notación sería la siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots$$

En el caso de una función de dos variables, sus segundas derivadas parciales estarán dadas por las cuatro siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Existe un teorema denominado *Teorema de Schwartz*, el cual dice que dadas ciertas condiciones, se puede demostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, se deja al lector realizar la lectura de este teorema, también llamado *Teorema de Clairaut*.

A continuación se presentan ejemplos en los que se muestra al lector el procedimiento para realizar el cálculo de una derivada de orden superior.

EJEMPLO 1

Determine la derivada parcial de segundo orden de $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Solución

Se debe calcular la derivada parcial de primer orden respecto a cada variable.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4$

Ahora se calcula la derivada parcial de segundo orden.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

EJEMPLO 2

Halle el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ con x= -1, y = 2, para $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$.

Solución

Se calcula la derivada parcial de primer orden respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + 10xy^2$$

Luego la de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10y^2$$

Seguidamente se sustituye por los valores dados en el enunciado

$$10(2)^2 = 40.$$

EJERCICIOS

1. Halle la derivada parcial de segundo orden ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) de las siguientes funciones. Evalúelas cuando x = 1, y = 3.
   a. $f(x, y) = \frac{x^4y^2}{x+y}$
   b. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2 - 4y^4$
   c. $f(x, y) = 5x^3y^2 + 3x - 2y$

□ REGLA DE LA CADENA

En la segunda lectura se estudió la regla de la cadena para una variable, ahora se estudiará su aplicación en varias variables.

Según Urbán, R (s.f, p.27) si se tiene una función z = f(x, y) con derivadas parciales continuas y las funciones derivables x = f(t), y = g(t), la regla de la cadena para estas funciones compuestas es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Además, Urbán agrega que una generalización de la regla de la cadena se da cuando z = f(x, y) y las variables *x, y*, dependen de otras variables, tales como *u, w*, entonces si las funciones tienen derivadas parciales continuas, la función z = f(x (u, w), y (u, w)) y su derivadas serían corresponderías a las siguientes derivadas parciales, según la regla de la cadena

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}$$

A continuación se presentan ejemplos para que el lector observe la aplicación de la regla de la cadena en varias variables, el primer ejemplo muestra dos formas de resolver el mismo ejercicio, uno sustituyendo variables y otro a través de la regla de la cadena, el siguiente, presenta una situación en la que la complejidad de variables favorece utilizar directamente las fórmulas presentadas anteriormente para aplicar la regla de la cadena.

EJEMPLO 3

Considere $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy$ donde $x = 5t$, $y = t^3$, encuentre dz/dt.

Solución

Esta función se presta para sustituir los valores de *x, y* por sus equivalentes en t, y derivar en una variable.

$z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy = f(t) = 2(5t)^2 + (t^3)^2 + (5t)(t^3) = 50t^2 + t^6 + 5t^4$

$$\frac{dz}{dt} = f'(t) = 100t + 6t^5 + 20t^3$$

Ahora aplicando regla de la cadena.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (4x + y)(5) + (2y + x)(3t^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = 20x + 5y + 6yt^2 + 3xt^2 \text{ , } se\ sustituye\ x, y\ por\ sus\ equivalencias\ en\ t$$

$$20(5t) + 5(t^3) + 6(t^3)(t^2) + 3(5t)(t^2) = 100t + 20t^3 + 6t^5$$

Observe que el resultado es el mismo que se obtuvo anteriormente.

EJEMPLO 4

Una pequeña empresa produce lechuga hidropónica (x) y lechuga regular (y), la función de costos está dada por $C(x, y) = 0{,}02(x + y)^3 - 0{,}1(x + y)^2 + 3(x + y) + 300$, las funciones de demanda $x = 125 - L_h^2 - 0{,}1L_r^2, y = 130 - 0.1L_h^2 - 2L_r^2$.

a. Calcule por regla de la cadena $\frac{\partial C}{\partial L_h}$.
b. Evalúe para $L_h = 2, L_r = 3$.

Solución

a. Aplicando

$$\frac{\partial C}{\partial L_h} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_h} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_h}$$

$$\frac{\partial C}{\partial L_h} = [0.06(x+y)^2(1) + 0.2(x+y)(1) + 3(1)](-2)L_h + [0.006(x+y)^2 - 0.2(x+y) + 3](-0.2L_h)$$

$$\frac{\partial C}{\partial L_h} = -0.12(x+y)^2L_h + 0.4(x+y)L_h - 6L_h - 0.012(x+y)^2L_h + 0.04(x+y)L_h - 0.6L_h$$

$$\frac{\partial C}{\partial L_h} = -0.132(x+y)^2L_h + 0.44(x+y)L_h - 6.6L_h$$

b. En la derivada obtenida en el último paso del punto anterior, se sustituye por los valores correspondiente, considere que debe sustituirse también en las equivalencias de *x,y*.

$x = 125 - (2)^2 - 0{,}1(3)^2 = 120.1\ , y = 130 - 0.1(2)^2 - 2(3)^2 = 111.6$

$L_h = 2, L_r = 3$

$-0.132(120.1 + 111.6)^2(2) + 0.44(120.1 + 111.6)(2) - 6.6(2) = -13\,982.11496$

Se deja al lector realizar el ejercicio $\frac{\partial C}{\partial L_r}$.

EJERCICIOS

1. Halle dw/dt utilizando la regla de la cadena.
   a. $w = x^2 + y^2$, $x = 2t$, $y = t^3$.
   b. $w = \sqrt{x\{2 + y^2}, x = \frac{3t}{2}, y = 12 + 4t$
   c. $w = xy$, $x = 2 - 5t$, $y = 3 + 2t^2$
   d. $w = x^2y - y^2$, $x = t - 4$, $y = 3t^3$

2. Halle $\frac{\partial w}{\partial s}, y \frac{\partial w}{\partial t}$, utilizando la regla de la cadena apropiada y evalúe cada derivada parcial para los valores indicados de *s* y *t*.
   a. $w = x^2 + y^2$, $x = s + t$, $y = s - t$, $s = 2$, $t = -1$.
   b. $w = y^3 - 3x^2y$, $x = s - 2t$, $y = 4t$, $s = 2$, $t = -2$.
   c. $w = 2x + 3y$, $x = s + t$, $y = s - t$, $s = 0$, $t = 3/2$.

□ MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este apartado se estudia cómo determinar los puntos máximos y mínimos de una función, semejante a cuando se estudiaron en cálculo de una variable en los que se utiliza los criterios de la primera y segunda derivada, en varias variables se utiliza la derivada para el cálculo de estos puntos.

Por definición, una función tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si el valor de la

función en este punto es menor a los valores que toma en los puntos vecinos, $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\ \forall\ (x, y)$, en una región que contenga a (x_0, y_0) (Urbán, R. s.f. p. 32).
En los puntos máximos y mínimos las primeras derivadas parciales son cero.
Es importante tomar en cuenta que los máximos o mínimos no son necesariamente absolutos de la función por lo que suelen ser llamados como extremos relativos.

Criterio de la primera derivada

La primera derivada se utiliza para determinar los puntos críticos de una función, básicamente se realiza la derivada parcial respecto a cada variable, se toman los resultados de las variables y se establece un sistema de ecuaciones y se da solución al mismo. Los resultados donde se hace cero las ecuaciones son los valores para las variables, que pueden ser *x, y*, que conformarán los puntos críticos.

EJEMPLO 5

Encuentre los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 + y^4 - 3xy$.

Solución

Primero se determinan las derivadas parciales, las cuales están dadas por

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{df}{dy} = 4y^3 - 3x$$

Segundo, se establece un sistema de ecuaciones para resolverlo y hallar los valores de *x, y*, en los que se hacen cero las derivadas.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 4y^3 - 3x = 0 \end{cases}$$

Se deja al lector resolver el sistema de ecuaciones.
Luego de resolver el sistema de ecuaciones, se determina que los valores que toma *x* son 0 y $\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$, mientras los valores de *y* son 0 y $\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2$, por lo tanto los puntos críticos de la función corresponden a: (0, 0) y $\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}, \left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2\right)$.

EJEMPLO 6

Halle los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^4 - 12x - 2y^2$.

Solución

Primero determine las derivadas parciales.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{df}{dy} = 4y^3 - 4y$$

Luego establezca el sistema de ecuaciones y resuélvalo.

$$\begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

En este caso las soluciones para x corresponden a -2 y 2, para *y* los resultados son: 0, -1 y 1.

Por lo tanto los puntos críticos corresponden a los pares ordenados que se forman entre los valores de x con los de y: (2, 0), (-2, 0), (2, -1), (2, 1), (-2, 1) y (-2, -1).

De modo similar se trabaja con tres variables.

Recuerde que no toda función va a presentar puntos críticos.

Criterio de la segunda derivada

La segunda derivada permite determinar si los puntos críticos hallados con la primera derivada son puntos máximos, mínimos o silla.

Para poder determinar el tipo de punto hallado se requiere del criterio de derivada parcial segunda que dice lo siguiente:

Sea una función f con derivadas parciales primeras y segundas continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Para determinar si en dicho punto hay un extremo relativo de f, definimos la cantidad

$$d = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2$$

- Si d > 0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, entonces f(a, b) es un mínimo relativo.
- Si d > 0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, entonces f(a, b) es un máximo relativo.
- Si d < 0, entonces (a, b, f(a, b)) es un punto silla.
- Este criterio no contempla si d = 0.

EJEMPLO 7

Clasifique los puntos crítico de f(x, y) = -x³ + 4xy – 2y² + 1, en mínimos o máximos relativos o punto silla.

Solución

Primero se determinan los puntos críticos realizando la primera derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -3x^2 + 4y \\ 4x - 4y \end{cases}$

Se obtienen las siguientes soluciones: x = y, x = y = 0, x = y = 4/3.

Segundo se realizan las derivadas parciales segundas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$$

Se calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, que consiste en realizar primero la derivada parcial respecto a x, el resultado se le realiza la derivada parcial respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

Se utiliza la fórmula para determinar d con los puntos críticos obtenidos anteriormente (0, 0), (4/3, 4/3).

En este caso se inicia evaluando en la derivada parcial segunda el punto (0, 0)

$$d = -6(0) \cdot (-4) - (4)^2 = -16$$

Como d < 0, es un punto silla en (0, 0, 1), el 1 se obtiene de sustituir los valores de *x, y* en f.

Ahora se analiza el punto (4/3, 4/3).

$$d = -6\left(\frac{4}{3}\right) \cdot (-4) - (4)^2 = 16$$

En este caso d > 0, por lo que se debe evaluar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\left(\frac{4}{3}\right) = -8$$

Entonces como d > 0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, entonces f(a, b) es un máximo relativo.

EJERCICIOS

1. Halle los puntos críticos de las siguientes funciones, si los tienen.

a. $f(x,y,z) = x^3 - y^3 - xz - yz$

b. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - xz - yz$

c. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + x - yz$

d. $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

e. $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

f. $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$

g. $f(x,y) = x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4$

2. Utilice el criterio de la segunda derivada para clasificar los puntos críticos obtenidos en el punto anterior como máximos, mínimos o silla.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El método de multiplicadores de Lagrange, es utilizado en el cálculo de máximos y mínimos de funciones en varias variables que presentan restricciones.

Al aplicar este método en economía, se pueden hallar limitaciones reales como son: el monto a invertir, tecnología, mercado, entre otros.

Urbán, R. (s.f.) expone de forma clara este método, de la siguiente forma:

> Considere que debe optimizar la función f(x, y) con base en la restricción g(x, y) = 0, se forma así la función objetivo $L(x,y,\text{ג}) = f(x,y) - \text{ג}g(x,y)$, ג es el multiplicador de Lagrange, que es independiente de las variables *x, y*. … El proceso para determinar los puntos extremos consiste en determinar las derivadas parciales de $L(x,y,\text{ג})$con respecto a las tres variables, y se igualan a cero, se determinan los valores de cada una, pero se utilizan solamente los de *x, y*.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \text{ג}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \text{ג}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Luego de este paso, donde se han hallado los valores de los puntos críticos, se procede con el criterio de la segunda derivada, como se estudió en el apartado anterior. (Urbán, R. s.f. p.43 – 45)

Observe el siguiente ejemplo para su mejor comprensión.

EJEMPLO 9

Obtener los puntos críticos de f(x, y) = $5x^2 + 6y^2$ - xy con base en la restricción x + 2y = 24, clasifique los puntos hallados.

Solución

Se establecen los datos que se requieren para dar solución al ejercicio:

g(x, y) = x + 2y - 24

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy - \lambda(x + 2y - 24)$

$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy - x\lambda - 2y\lambda + 24\lambda$

Establecida la función objetivo, se procede a calcular las derivadas parciales de cada variable.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 10x - y - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 12y - x - 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 24$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones, en este caso considera que es de tres variables (x, y, λ) cuando hallan los valores de cada variable, no se toma en cuenta el valor de λ en la resolución del ejercicio.

$$\begin{cases} 10x - y - \lambda = 0 \\ -x + 12y - 2\lambda = 0 \\ x + 2y = 24 \end{cases}$$

Los valores obtenidos son x = 6, y = 9, y λ = 51 (valor que no se requiere).

Por lo tanto se establece que la función f, con base a la restricción correspondiente tiene un punto crítico en (6, 9).

Se procede a determinar las derivadas parciales segundas.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 10$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 12$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1$$

Se determina el valor de d.

$$d = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right]^2$$

$$d = 10 \cdot 12 - (-1)^2 = 119$$

Como d > 0 debe determinarse $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a, b)$, el cual es 10.

Se tiene que d > 0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, entonces f(a, b) es un mínimo relativo.

EJEMPLO 10

Empleando P unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto con $P(P, K) = 50P^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$. Le cuesta a la empresa $100 por cada unidad de mano de obra y $300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de $45 000 para producción.

Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar con objeto de maximizar su producción.

Solución

La función a maximizar es $P(P, K) = 50P^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$, la cual está restringida por los montos de mano de obra, capital empleado y producción, la ecuación que representa los datos de restricción es la siguiente: 100P + 300K = 45 000. Se establece la función objetivo y las derivadas parciales respecto a cada variable.

$$L(P, K, \lambda) = 50P^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 100P\lambda - 300K\lambda + 45000\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \frac{100}{3}P^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 100\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = \frac{50}{3}P^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} - 300\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100P + 300K - 45000$$

Se establece el sistema de ecuaciones y se resuelve.

$$\begin{cases} \frac{100}{3} P^{-\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}} - 100\lambda = 0 \\ \frac{50}{3} P^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{2}{3}} - 300\lambda = 0 \\ 100P + 300K = 45000 \end{cases}$$

Los resultados corresponden a P = 300, K = 50, $\lambda = \frac{1}{3\sqrt[3]{6}}$, este último no es requerido, sin embargo se brinda al lector para que pueda corroborar sus propios cálculos.

Por lo anterior se puede decir que hay un punto crítico en (300, 50).

Por lo tanto la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

EJERCICIOS

Hallar los puntos de extremo de f sujeta a las restricciones enunciadas, determine el tipo de punto que es (máximo, mínimo, silla)

a. $f(x, y) = x - y$, sujeta a $x^2 - y^2 = 2$
b. $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a $2x^2 + 3y^2 = 3$
c. $f(x, y) = x$, sujeta a $x^2 + 2y^2 = 3$
d. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $2x + 3y = 7$
e. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, sujeta a $2x + 3y = 31$
f. $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a $x^2 + y^2 = 13$
g. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$, sujeta a $xy = \sqrt{6}$