MÁS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En economía se trabaja con diferentes variables simultáneamente, por ejemplo, cuando se trabaja con Producto Interno Bruto (PIB) se consideran las variables que lo conforman: gasto en consumo privado (como el hogar), inversión privada, gasto público, importaciones y exportaciones, para trabajar este tipo de situaciones, son útiles las funciones en varias variables, las cuales son objeto de estudio en este módulo. Se dará inicio con el estudio de dos variables.

FUNCIONES DE DOS VARIAS

En el estudio de las ciencias económicas, intervienen muchas relaciones que pueden ser expresadas como funciones de dos variables, tal es el caso de la función de producción en la que están en juego la cantidad producida y los diferentes elementos para la producción. Esta función generalmente está representada por

$$Q = f\,(K, L)$$

donde K representa capital y L trabajo.

Las funciones en dos variables se denotan de la siguiente manera:

$$z = \underbrace{f\,(x, y)}_{\text{2 variables}} = x^3 + 2xy$$

Las variables independientes corresponden a *x, y*, mientras que *z* corresponde a la variable dependiente.

Observe el siguiente ejemplo en el que se utiliza las funciones en dos variables.

EJEMPLO 1

Una pequeña empresa produce pulseras y collares de bisutería. El costo de producir una pulsera es de ¢50, y un collar es ¢75. La empresa tiene costos fijos mensuales de ¢50 000.

a. Determine el costo mensual de producción de ambos tipos de accesorios.
b. Si las pulseras se venden ¢250, y los collares en ¢500, obtenga la función de utilidad.

Solución

a. El costo de producción de x cantidad de pulseras corresponde a 50x, y *y* cantidad de collares corresponde a 75y.
   C(x, y) = costo fijo + costo variable
   C(x, y) = 50 000 + 50x + 75y.

b. De modo semejante a lo trabajado en el tema de Funciones Marginales, para determinar la función utilidad se requiere primero de la función de ingreso total, la cual está dada por:
   I(x, y) = ventas de x + ventas de y
   I(x, y) = 250x + 500y
   Las utilidades se obtienen de la diferencia entre las ventas y los costos:
   U(x, y) = ingresos – costos
   U(x, y) = 250x + 500y – (50 000 + 50x + 75y)
   U(x, y) = 200x + 425y – 50 000

Cuando se cuenta con las funciones correspondientes puede darse valores a *x, y* para determinar los costos de producción de determinada cantidad de collares y pulseras, o para proyectar las utilidades con cierta cantidad de producto.
Suponga que se producen 950 pulseras y 1100 collares, y desea determinar el costo y las utilidades, para ello se utilizan las funciones obtenidas en a., y b.
C (950, 1100) = 50 000 + 50(950) + 75(1100) = 180 000, es decir el costo de producir esa cantidad de pulseras y collares es de ¢180 000.

U (950, 1100) = 200(950) + 425(1100) – 50 000 = 607 500, es decir las utilidades obtenidas luego de producir y vender esa cantidad de pulseras y collares corresponde a ¢607 500.

Dentro del estudio de las funciones, es importante determinar el dominio de una función. A continuación, se brindan unos ejemplos en los que se muestra el cálculo del dominio de una función en dos variables.

EJEMPLO 2

Halle el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

b. $g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$

Solución

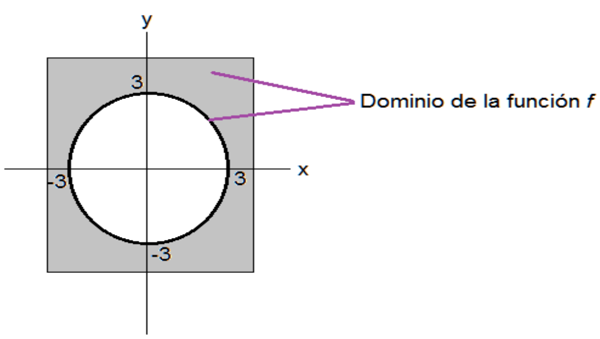
a. Para determinar el dominio de la función, debe averiguar si la función se indefine en algún valor, de modo semejante que en la función en una variable. En este caso la función *f* su denominador debe ser x ≠ 0 y su numerador se trabaja como una inecuación:

$$\sqrt{x^2+y^2-9} \geq 0, se\ elva\ al\ cuadrado\ ambos\ lados\ de\ la\ inecuación$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2-9}\right)^2 \geq 0^2, luego\ se\ despejan\ las\ variables$$

$$x^2+y^2 \geq 9$$

De este modo, el dominio de la función *f* es está definida para todos los puntos (x, y) ubicados sobre o fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, excepto los del eje y. Esto se muestra en la siguiente figura:



b. En este caso, la función g está definida en cualquier valor para su numerador, será el denominador quien determine los valores que corresponden al dominio. Semejante a la parte a., se trabaja con una inecuación, pero con el símbolo mayor estricto puesto que está en el denominador y este no puede ser igual a cero puesto que se indefine la función.

$$\sqrt{x^2+y^2-9} > 0, se\ elva\ al\ cuadrado\ ambos\ lados\ de\ la\ inecuación$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2-9}\right)^2 > 0^2, luego\ se\ despejan\ las\ variables$$

$$x^2+y^2 > 9$$

Por lo tanto, el dominio de esta función corresponde al conjunto de todos los puntos (x, y) situados fuera del círculo $x^2 + y^2 = 9$. A diferencia del ejercicio a., el círculo no corresponde al dominio, solo la parte sombreada.

De modo similar como se trabaja en dos variables, se trabaja en tres, cuatro y más variables, tanto para determinar dominios, hallar valores de la función, aplicaciones tanto en ciencias económicas, como en física, ingeniería, entre otros.

EJERCICIOS

1. Determine si *z* es función de las variables *x, y*.

   $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\quad$ $x^2 - y^2 = z^2$

   $x^2y^2z = 10$ $\quad$ $x^2yz^2 = 10$

2. Determine los valores de la función, dados (x, y).

   a. $f(x,y) = \frac{x}{y}$

   b. $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$

   c. $f(x,y) = ln|x+y|$

   d. $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$

   Para los valores

   f(30, 5) $\quad$ f(5, y)

   f(-1, 4) $\quad$ f(x, 2)

3. Determine el dominio de las siguientes funciones.

   a. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

   b. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

c. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

d. $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

□ DERIVADAS PARCIALES

Según Urbán, R (s.f)

> para una función de dos variables con (x, y) asociados a g(x, y), podemos estudiar la existencia en cada punto (x_0, y_0) de su dominio la existencia de dos derivadas llamadas derivadas parciales. Si dejamos una variable fija por ejemplo "y" variamos la otra, de esta manera tendremos una función de una variable ya que las otras serán consideradas como constantes (p.9).

Para realizar las derivadas parciales se utiliza la notación del matemático Leibniz

$$\frac{\partial f(x_{0,}y_0)}{\partial x}$$

De este modo la definición de una derivada en dos variables *x, y*, con respecto a *x* está dada por

$$\frac{\partial f(x_{0,}y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La definición de la derivada en dos variables respecto a *y* está dada por

$$\frac{\partial f(x_{0,}y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si solo si los límites existen.

Es importante que el lector tenga claro la lectura de los símbolos y sus significados en este tema, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lee *derivada parcial de f con respecto a x*, lo que quiere decir es que al derivar se considera como variable a *x* y las demás variables serán consideradas contantes; por otro lado $\frac{\partial f}{\partial y}$ se lee *derivada parcial de f con respecto a y*, lo que significa que la variable será *y* mientras las demás variables se mantendrán constantes.

Observe el siguiente ejemplo para realizar derivadas parciales respecto a una u otra variable.

EJEMPLO 3

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ para las siguientes funciones.

a. $f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$
b. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$

Solución

a. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2xy^2 + 6xy$ se deriva siguiendo las mismas reglas estudiadas en la lectura 2, considerando a *y* como constante.
b. $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 2x^3$ en este caso la constante es *x,* y la variable *y* será la que utilice las reglas de derivación ya estudiadas.

EJEMPLO 4

Determine $f_z(x, y, z)$ (la derivada parcial respecto a z) para: $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$

Solución

$$f_z(x, y, z) = 0 + 2yz + x = 2yz + x$$

EJEMPLO 5

Calcule $f_w(x, y, z, w)$ (la derivada parcial respecto a w) para: $f(x, y, z, w) = \frac{x+y+z}{w}$

Solución

$$f_w(x, y, z, w) = \frac{0 \cdot w - (x + y + z)}{w^2} = \frac{-x - y - z}{w^2}$$

Entre las **aplicaciones de la derivada parcial** están la solución de situaciones tales como productividad marginal, relaciones de demanda, utilidad marginal, etc., observe el siguiente ejemplo en el que se utiliza la derivada parcial en la resolución de un problema de producción.

EJEMPLO 6

La función de producción de cierta empresa está dada por

$$P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

Donde L es el insumo mano de obra medido en miles de horas-persona por semana, K es el monto de capital invertido medido en miles de colones por semana, y P es la producción semanal en miles de artículos.

a. Determine las productividades marginales cuando L = 5 y K = 12.
b. Interprete los resultados obtenidos en a.

Solución

a. Para determinar las productividades debe calcularse las derivadas parciales respecto a L y respecto a K.

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4L + 3K \ \text{ y } \ \frac{\partial P}{\partial K} = 3L + 8 + 6K$$

Luego de calcular las derivadas parciales, se utilizan los valores de L y K en cada una de ella:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4(5) + 3(12) = 61 \quad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial K} = 3(5) + 8 + 6(12) = 95$$

b. Los valores de L = 5 y K = 12, significan que se emplean 5000 horas-persona por semana y el monto del capital invertido es de ¢12 000 por semana, entonces P se incrementa en un 61 por cada incremento unitario en L y P se incrementa un 95 por cada incremento unitario en K, es decir la producción se incrementa en 6100 artículo por semana por cada 1000 horas persona adicionales de mano de obra empleada cuando K se mantiene fijo, y la producción se incrementa en 9500 artículos por semana por cada ¢1000 adicionales de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo. (Arya, J. y Lardner, R., 1992).

EJERCICIOS

1. Para cada una de las siguientes funciones de producción y sus respectivos valores dados, determine las productividades marginales de cada una.
   a. $P(L, K) = 7L + 5K + 2LK - L^2 - 2K^2$, L = 3, K = 10.
   b. $P(L, K) = 18L – 5L^2 + 3LK + 7K - K^2$, L = 4, K = 8.
   c. $P(L, K) = 50L + 3L^2 - 4L^3 + 2LK^2 - 3L^2K – 2K^3$, L = 2, K = 5.
2. Calcule las derivadas parciales ($\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$) para las siguientes funciones.
   a. $f(x, y) = x^2 + y^2$
   b. $f(x, y) = 3x^3 + 5y^4 + 7$
   c. $f(x, y) = xy^2 + x^2y$
   d. $f(x, y) = \frac{y}{y-x}$
   e. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

□ DIFERENCIACIÓN PARCIAL IMPLÍCITA

En la lectura 2 se estudió la derivación implícita en una variable, el proceso es semejante en varias variables, a diferencia de la derivación parcial en donde se deriva con respecto a una sola variable y las demás se consideran constantes, aquí se va a derivar cada una de las variables como la función que corresponde como composición de funciones.

Urbán, R. (s.f) señala que:

> Muchos modelos económicos consisten de funciones compuestas. Se trata de funciones de varias variables que también son funciones de otras variables. Por ejemplo la cantidad producida puede ser función del capital y del trabajo y ambos a su vez son funciones del tiempo (p.24).

En este curso se considera la derivación con tres variables, para realizar esta derivación se consideran las siguientes fórmulas:

Para derivar respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Para derivar respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

A continuación se presentan diferentes ejemplos en los que el lector podrá observar el procedimiento de la derivación implícita en varias variables.

EJEMPLO 7

Determine la derivada parcial por diferenciación parcial implícita de

$$f(x, y, z) = 3x^3 + 5y^2 + 4xz - 2xy + 20$$

Solución

Para realizar la derivación respecto a x, se utiliza la fórmula brindada anteriormente de a siguiente forma:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{(9x^2+4z-2y)}{4x}$ El numerador se deriva de forma parcial respecto a x, las demás variables se consideran constantes, el denominador se deriva parcialmente respecto a z, las demás variables se consideran constantes.

Ahora la derivación respecto a y:

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{(10y-2x)}{4x}$ El numerador se deriva de forma parcial respecto a y, las demás variables se consideran constantes, el denominador se deriva parcialmente respecto a z, las demás variables se consideran constantes.

EJEMPLO 8

Si $\frac{xz^2}{x+y} + y^2 =, evaluar \frac{\partial z}{\partial x}\ cuando\ x = -1, y = 2, z = 2$.

Solución

Para la resolución de este ejemplo, se utiliza la fórmula $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{z^2(x+y) + xz^2(1)}{(x+y)^2} + 0}{\frac{2xz(x+y) + xz^2(0)}{(x+y)\text{^}2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{z^2(x+y-z)}{(x+y)^2}}{\frac{2xz}{(x+y)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{z^2 y}{(x+y)^2}}{\frac{2xz}{(x+y)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{zy}{2x(x+y)}$$

$$-\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot -1(-1+2)} = 2$$

El procedimiento presenta la derivación parcial en el numerador respecto a x, mientras en el denominador respecto a z. Luego sigue una serie de procedimientos algebraicos de simplificación, hasta que se obtiene la expresión canónica, en la cual se evalúa los valores dados.

Se deja al lector realizar $\frac{\partial z}{\partial y}$.

EJERCICIOS

1. Determine las derivadas parciales indicadas por diferenciación parcial implícita.

   a. $z^2 - 3xy = y^2 - 3,\ \frac{\partial z}{\partial x}$

   b. $z^2 + x^2 - zy + zx = 3,\ \frac{\partial z}{\partial x}$

   c. $z^3 + z^2 - 3zxy + x = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y}$

   d. $z^2 - 3xy = x^2 + \sqrt{y^2 - 1},\ \ \frac{\partial z}{\partial x}$

   e. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x}$

   f. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9,\ \frac{\partial z}{\partial y}$

2. Evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

   a. $z^2 - 3xy = y^2 - 1,\ \frac{\partial z}{\partial x}, (x, y, z) = (1,2,3)$

   b. $\sqrt{x^2 - 2yz} - y^2 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x}, x = 2, y = 2, z = 0$

   c. $z^3 + z^2 - 3zxy + x = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y}, (x, y, z) = (1, 1, 2)$

   d. $z^2 + x^2 - zy + zx = 3,\ \frac{\partial z}{\partial x}, x = 1, y = 2, z = 2$

   e. $xz^2 + yz - 12 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x}, x = 2, y = -2, z = 2$

   f. $\frac{s^2+t^2}{rs} = 10,\ \frac{\partial t}{\partial r}, r = 1, s = 2, t = 4$