FUNCIONES MARGINALES

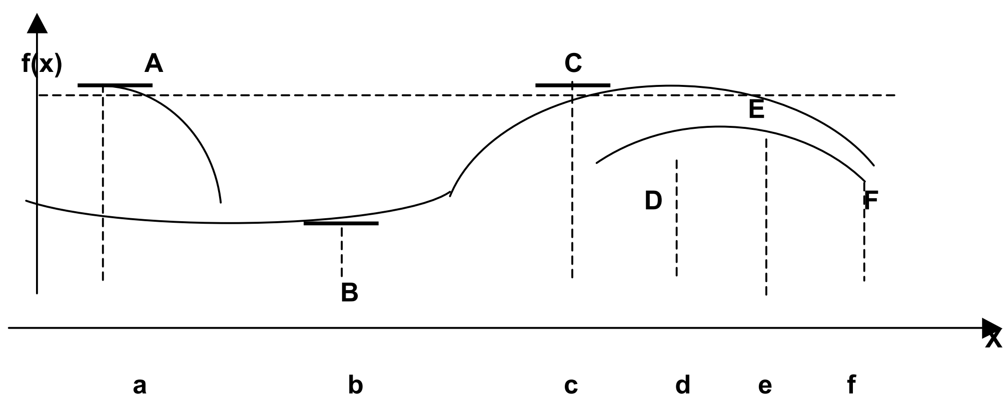
FUNCIONES MARGINALES: COSTO MARGINAL, INGRESO MARGINAL Y UTILIDAD MARGINAL

• CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES. EXTREMOS EN UN INTERVALO CERRADO

Definición: Decimos que f(c) es el valor **máximo absoluto** de una función f en un intervalo (a,b) que contiene a **c**, si $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (a,b)$. De manera análoga se define un valor mínimo absoluto de una función en su intervalo.

Teorema: Diremos sin demostración que si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f(x) tiene un máximo y un mínimo en [a,b]

Extremos de una función.



Kudriavtsev, L. D. y otros (1992): "Problemas de análisis matemático. Integrales. Series". Mir Moscú

Sea f(x) una función continua en el intervalo [a, f], en este intervalo, la función presenta dos valores máximos en **A, C** (f(a), f(c)) y un valor mínimo en **B** (f(b)), se conocen como máximos absolutos. Los puntos **D, F** corresponden a mínimos en su entorno y por lo tanto son mínimos relativos, análogamente **E** que corresponde a un máximo relativo.

Definición

Decimos que f(c) es un **máximo relativo** de una función f si existe un intervalo abierto (c – ε, c + ε), con ε >0, tal que f(x) está definida y f(x) ≤ f(c), $\forall$ x $\in$ (c – ε, c + ε).

Decimos que f(c) es un **mínimo relativo** de una función f si existe un intervalo abierto (c – ε, c + ε), con ε >0, tal que f(x) está definida y f(x) ≥ f(c), $\forall$ x $\in$ (c – ε, c + ε).

Teorema

Sea f(x) una función continua en el intervalo abierto (a, b) y sea c un punto de este intervalo. Si f(c) es un extremo de f, entonces f´(c) = 0 o bien no existe.

Demostración

Sea f(c) un valor máximo relativo de f, y supongamos que f ´(c) existe. Entonces existe un intervalo abierto (c – ε, c + ε), con ε >0 tal que $\forall$ x ≠ c en este intervalo:

(1) $$f(x) - f(c) \leq 0$$

Cuando x $\in$ (c – ε, c): **(2)** x – c < 0

De (1) y (2) se sigue que $\forall$ x $\in$ (c – ε, c) **(3)** $$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \geq 0$$

Por consiguiente: $$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

En forma análoga, $\forall$ x $\in$ (c, c + ε) **(4)** x – c > 0

De (1) y (4): $\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \leq 0$ $\forall$ x $\in$ (c, c + ε) y f ´(c) ≤ 0

Puesto que por hipótesis f ´(c) existe, tenemos que de f ´(c) ≤ 0 y 0 ≤ f ´(c), se tiene que f´(c) = 0 o bien no existe. La demostración es análoga cuando f(c) es un mínimo relativo de f.

Un número c para el cual una función f está definida y para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, se llama un **número crítico** para f.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA CÁLCULO DE LOS EXTREMOS

Así como la primera derivada mide la rapidez de variación de la función, la segunda derivada mide la rapidez de variación de la primera derivada, cuando la segunda derivada es positiva para un número c, significa que la primera derivada es creciente.

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f'(x)$ crece, de valores negativos a valores positivos cuando x crece al pasar por c, es decir, f(c) es un mínimo relativo de f. En forma semejante, si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f'(c)$ decrece de valores positivos a valores negativos cuando x crece al pasar por c; esto significa que f(c) es un máximo relativo de f.

Supongamos que f' y f'' existen en todo punto en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y sea $f'(c) = 0$. Entonces:

1. Si $f''(c) < 0$, f(c) es un máximo relativo de f.
2. Si $f''(c) > 0$, f(c) es un mínimo relativo de f.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

En esta parte miramos el comportamiento de un función f sobre un intervalo I. ¿Tiene f un valor máximo en I?¿y un valor mínimo?¿Dónde es creciente y decreciente la función? Aprovecharemos la derivada para responder estas preguntas

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea y = f(x) una función derivable en el intervalo (a,b).

- Sí f '(x) > O para todo x en el intervalo (a,b) entonces y = f(x) es creciente el intervalo (a,b).
- SÍ f '(x) < O para todo x en el intervalo (a,b) entonces y = f(x) es decreciente el intervalo (a,b).
- SÍ f '(x) = O para todo x en el intervalo (a,b) entonces y = f(x) es constante el intervalo (a,b).

VALORES MÁXIMOS Y MINIMOS

Algunas de las aplicaciones mas importantes del calculo diferencial son los problemas de optimización.

DEFINICIÓN

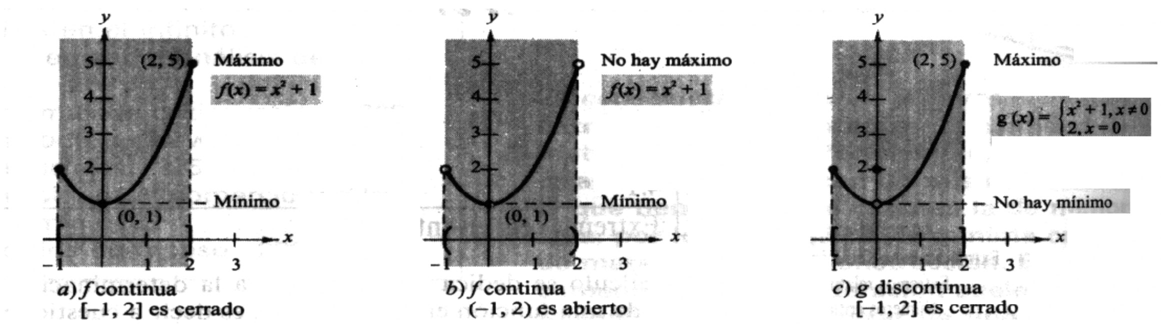
Sea y = f(x) una función definida en el intervalo (a,b) que contiene a c.

- Si f(c) ≤ f(x) para todo x en el intervalo (a,b), entonces f(c) es el valor mínimo de f(x) en el intervalo (a,b)
- Si f(c) ≥ f(x) para todo x en el intervalo (a,b), entonces f(c) es el valor máximo de f(x) en el intervalo (a,b)

El máximo y el mínimo de una función en un intervalo se llaman valores extremos o extremos de la función en ese intervalo.

EXTREMOS RELATIVOS

- Si existe algún intervalo abierto (a,b) que contiene a **c** en el que f(c) es el valor mínimo, se dice que f(c) es un mínimo relativo de f(x).
- Si existe algún intervalo abierto (a,b) que contiene a **c** en el que f(c) es el valor máximo, se dice que f(c) es un máximo relativo de f(x).



Granville (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas

NUMEROS CRÍTICOS

Si y = f(x) es una función definida en c y f '(c) = 0 ó si f '(x) no está definida en

x = c. entonces **c** es un número crítico de y = f(x).

Amigo estudiante como parte de tu estudio independiente debes consultar el teorema de Rolle y teorema del Valor Medio

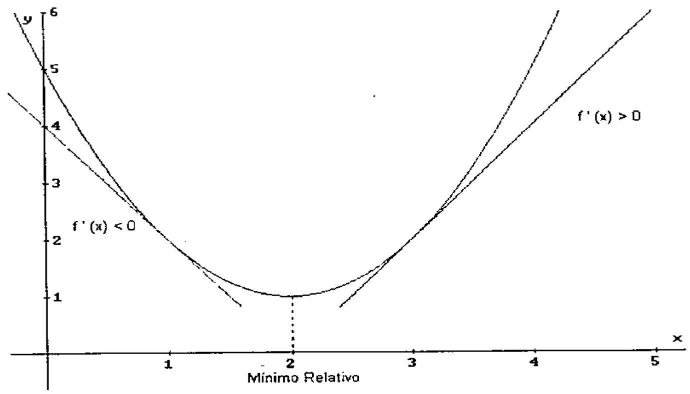
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea **c** número crítico de una función y = f(x) continúa en (a,b) que contiene a **c**. SÍ f(x) es derivable en (a,b), excepto quizás en c, entonces: FIG 16

- Si f ' (x) cambia de negativa, para **x < c**, a positiva, para x > c, entonces f(c) es un mínimo relativo de f(x)

- Si f ' (x) cambia de positiva, para **x < c**, a negativa, para x > c, entonces f(c) es un máximo relativo de f(x)

- Si f ' (x) no cambia su signo a partir de **x = c**, entonces f(c) no es un mínimo ni un máximo relativo de f(x).



Granville (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas

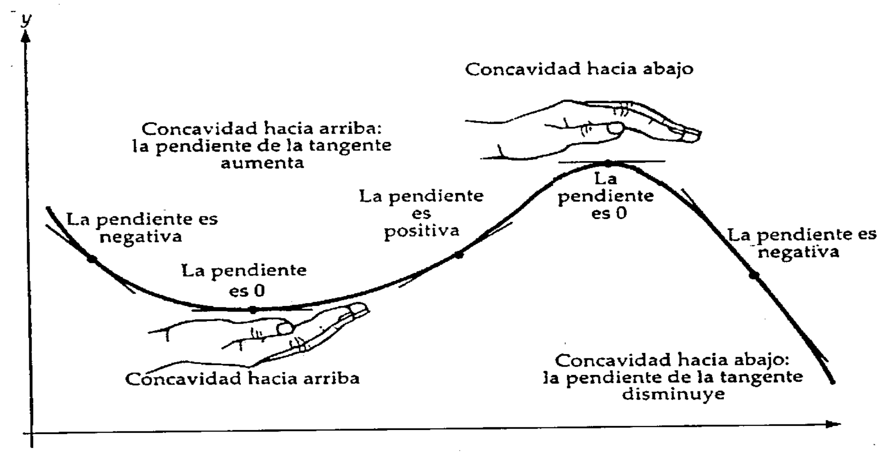
MAXIMOS Y MINIMOS ABSOLUTOS

Método del intervalo cerrado. Para hallar los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado [a,b]:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a,b)
2. halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, el más pequeño el valor mínimo absoluto.

CONCAVIDAD

Sea y = f(x) una función derivable en un intervalo abierto (a,b). Diremos que la gráfica de la función f (x) es cóncava hacia arriba si f '(x) es creciente en ese intervalo y cóncava hacia abajo si f '(x) es decreciente en ese intervalo.



Granville (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas

CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea. y = f(x) una función cuya segunda derivada, f "(x) existe en un intervalo abierto (a,b), entonces:

1. Si f " (x) > *O* para todo x en (a,b), entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

2. Si f" (x) < O para todo x en (a,b), entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Nota Una recta nunca es cóncava hacia arriba ó hacia abajo

PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea y = f(x) una función cuya gráfica tiene recta tangente en (c, f(c)). Se dice que el punto (c, f(c)) es un punto de inflexión si la concavidad de la gráfica de f cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo (o viceversa) en ese punto.

CRITERIO PARA DETERMINAR PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a,b), que contiene a $x = c$, si $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no está definida en $x = c$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

EJEMPLO hallar los puntos de inflexión y discutir la concavidad de la gráfica

$f(x)= x^4 +x^3 -3x^2 +1$

Derivando dos veces tenemos

$f'(x)= 4x^3 +3x^2 -6x$

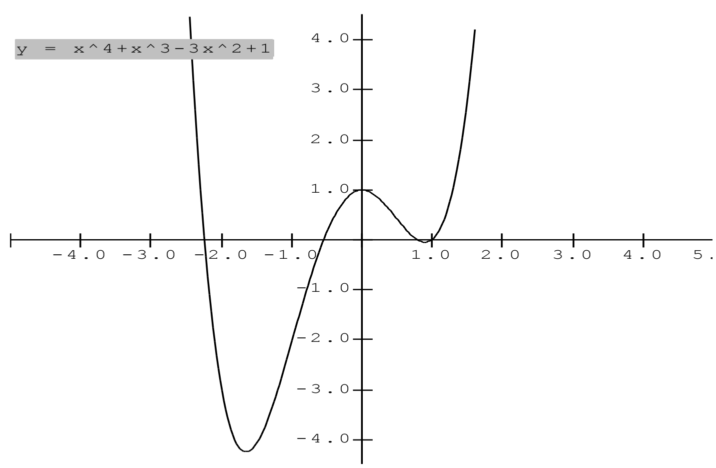
$f''(x)= 12x^2 +6x -6 = 6(2x-1)(x+1)$

$x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ son los posibles puntos de inflexión

En el intervalo definido entre $-\infty < x < -1$ la función es cóncava hacia arriba.

En el intervalo definido entre $-1 < x < \frac{1}{2}$ la función es cóncava hacia abajo.

En el intervalo definido entre $\frac{1}{2} < x < \infty$ la función es cóncava hacia arriba.



Nielsen, Ole A. (1997): "Introduction to integration theory and measure theory". John Wiley & Sons Ltd.

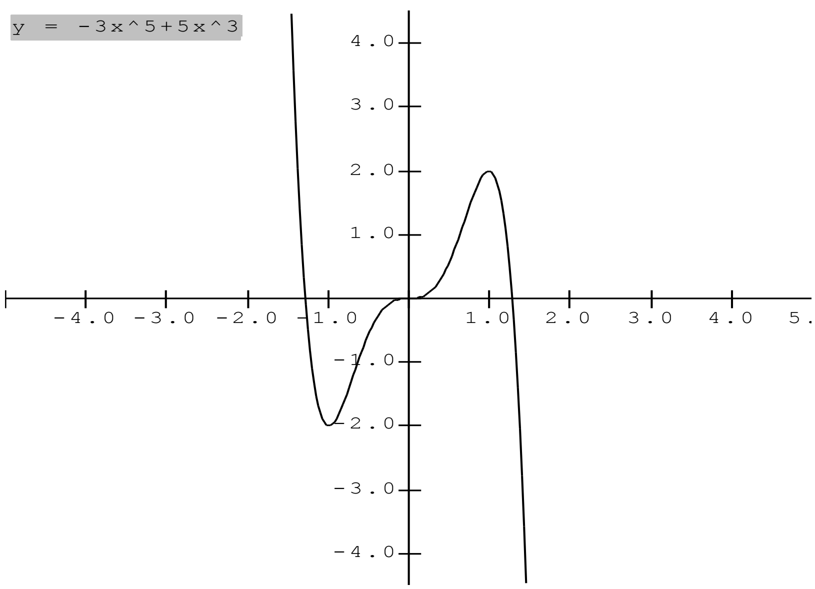
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Si existe la segunda derivada, esta se puede utilizar como un criterio sencillo de extremos relativos

Sea f una función tal que f´(c)= 0 y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a **c**

- Si f´´(c) >0, entonces f (c) es un mínimo relativo
- Si f´´(c) < 0, entonces f(c) es un máximo relativo
- Si f´´(c)= 0 el criterio no decide.

EJEMPLO Utilizar el criterio de la segunda derivada para hallar los extremos relativos de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$



Nielsen, Ole A. (1997): "Introduction to integration theory and measure theory". John Wiley & Sons Ltd.

TRAZADO DE CURVAS

Como estudio independiente debes estudiar el teorema del valor medio y el teorema de Rolle

EJERCICIOS

1. Determinar los extremos absolutos de la función y los valores de x donde se alcanzan

$f(x) = x^3 - 12x$ $[0,4]$

$f(x) = -x^2 + 3x$ $[0,3]$

2. Hallar los números críticos de f, si los hay, los intervalos abiertos de crecimiento y decrecimiento y localizar los extremos relativos. Representar las graficas con la ayuda de una calculadora

$f(x) = x^4 - 32x + 4$

$f(x) = x^2 + 8x + 10$

3. Utilizando el criterio de la segunda derivada , hallar los extremos relativos de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$