CÁLCULO EN UNA VARIABLE – DERIVADAS

CONCEPTO DE DERIVADA

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

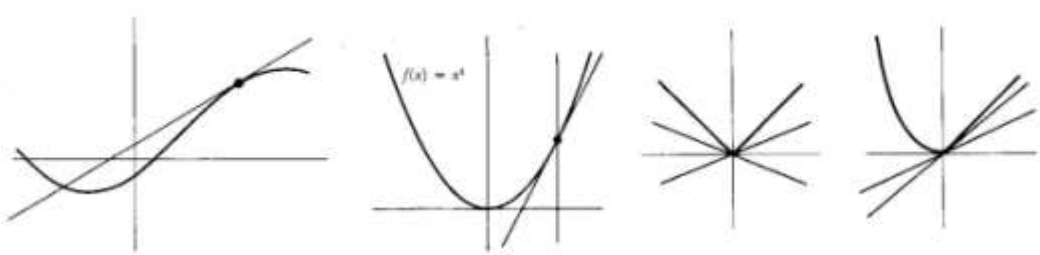
DEFINICIÓN:

Derivada de una función f(x) en un punto x=a, y se representa $f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a)$, al siguiente límite (si existe):

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA:

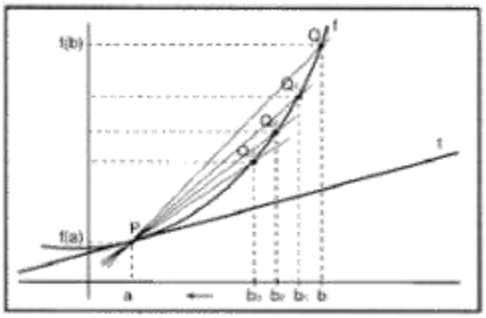
El conjunto de funciones reales de variable real es tan amplio que es prácticamente imposible encontrar propiedades generales para todas. Si nos restringimos a las funciones continuas ya pueden establecerse algunas propiedades importantes como los teoremas de Bolzano y de Weierstrass. Pero en las funciones continuas todavía se plantean muchos problemas como puede ser la determinación de la recta tangente en un punto de la gráfica. Con la definición intuitiva de que la tangente es la recta que toca a la curva sólo en ese punto la recta de la primera figura no sería tangente, mientras que en las otras figuras habría varias tangentes (alguna bastante extraña) en un mismo punto.



Enríquez (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas.

Lo cierto es que esa definición intuitiva sólo es válida para la circunferencia y curvas similares: cerradas y convexas ("sin baches"). Para el caso general hace falta una nueva definición que sea válida siempre y que corresponda a la idea intuitiva en los casos en que ésta pueda aplicarse. Y esa definición es la siguiente:

"La recta tangente a una curva en un punto P(a, f(a)) es la posición límite hacia la que tienden las rectas secantes que pasan por ese punto P y por otro punto Q de la curva, cuando el segundo punto Q se acerca a P".



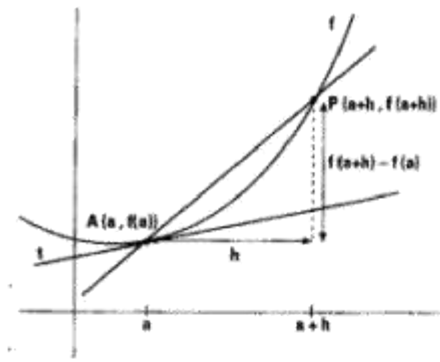
Enríquez (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas.

Para poder hallar la ecuación de esa recta tangente en el punto de coordenadas A(a, f(a)), si la escribimos en forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

necesitamos saber el valor de la pendiente m.

Para ello, *si tenemos en cuenta que la recta tangente es la posición límite de las secantes, entonces su pendiente será el límite de las pendientes de las secantes,* con lo que:



Enríquez (): "Cálculo diferencial e integral". Limusa, Trillas.

				$m_1 = \text{tg}\ _1 = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
				$m_2 = \text{tg}\ _2 = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Cuando esa situación la llevemos al límite, es decir, cuando acerquemos P hacia A, tendremos:

PUNTO FIJO	PUNTO VARIABLE	RECTA	ÁNGULO	PENDIENTE
A	A	tangente	α	$m = \text{tg}\ \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

DEFINICIÓN FÍSICA:

El cálculo de derivadas o cálculo diferencial surge en el siglo XVII al tratar de resolver una serie de problemas que aparecían en las Matemáticas y en la Física, como son (entre otros):

- la definición de velocidad
- la determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado.
- el cálculo de los valores máximos y mínimos que alcanza una función.

En estos y otros problemas similares de lo que se trata, en el fondo, es de estudiar, de medir y cuantificar, la variación de un determinado fenómeno, la rapidez con que se produce un cambio.

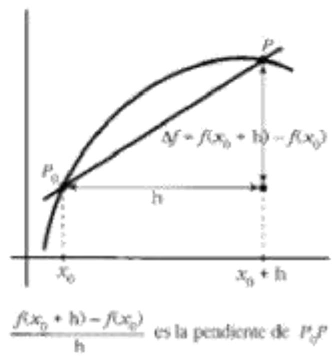
La tasa de variación media, o cociente incremental, nos da una primera idea de la rapidez con que varía un fenómeno en un intervalo determinado. Se define como el cociente:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir, nos dice cuanto variaría la función por cada unidad de variación de la variable independiente dentro del intervalo considerado suponiendo que esa variación fuese uniforme en todo el intervalo.

es decir, nos dice cuanto variaría la función por cada unidad de variación de la variable independiente dentro del intervalo considerado suponiendo que esa variación fuese uniforme en todo el intervalo.

La tasa de variación media coincide, evidentemente, con el valor de la pendiente de la recta que une los puntos de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Enríquez (): "Cálculo diferencial e Integral". Limusa, Trillas.

El valor obtenido al calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo determinado no quiere decir que en todo el intervalo se haya mantenido ese porcentaje de variación; de hecho, no suele ser así. Además, lo que interesa normalmente es saber lo que ocurre en un punto determinado: la velocidad en un instante dado, la trayectoria que seguirá un disco al ser lanzado, el punto en que un proyectil alcanza su máxima altura, etc.

Por tanto, el problema es estudiar la variación instantánea (de la función en un punto determinado x_0. Para ello lo que haremos será estudiar su variación en intervalos $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$) cada vez mas pequeños haciendo que x se aproxime a x_0. En el momento en que x coincida con x_0 la tasa de variación media se convertirá en la tasa de variación instantánea que es lo que realmente nos interesa.

Pero el problema es que en el cociente que define la T.V.M. al llegar a coincidir x con x_0 el denominador valdría 0. Por ello se define la tasa de variación instantánea como:

$$TVI(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Y este límite es lo que hemos llamado derivada de la función f en el punto x_0.
Por tanto la derivada puede interpretarse también como la tasa de variación instantánea, es decir, como la razón de cambio instantánea de una función.

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Obtener la expresión de la función derivada de una función dada implica calcular el límite que define a esa función derivada en un punto genérico usando la expresión que define a la función original; es decir, calcular

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero calcular ese límite cada vez que deseemos obtener la derivada de una función resulta bastante engorroso y, por ello, se obtienen (aunque no las demostraremos) unas expresiones o fórmulas generales que permiten obtener fácilmente la derivada de cualquier función. Esas fórmulas o reglas de derivación son las siguientes:

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE:

Una función constante es siempre derivable y su derivada vale siempre 0.

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD:

La función identidad es siempre derivable y su derivada vale siempre 1.

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE NATURAL:

La función potencial de exponente natural es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$$

4. DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables la función suma f + g también es derivable y su derivada es la suma de las derivadas.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

5. DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables la función producto f g también es derivable y su derivada vale

$$(f\,g)'\,(x) = f'\,(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'\,(x)$$

Como caso particular tenemos que si una función f es derivable el producto de un número k por la función f también es derivable y su derivada vale

$$(k \cdot f)'\,(x) = k\;\; f'\,(x)$$

En el caso de tres funciones sería:

$$(f\,g\,h)'\,(x) = f'\,(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'\,(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'\,(x)$$

y así sucesivamente.

6. DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables, en los puntos en que la segunda sea distinta de cero la función cociente también es derivable y su derivada vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'\,(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'\,(x)}{[g(x)]^2}$$

Como caso particular tenemos que si una función g es derivable la función $\frac{1}{g}$ es derivable en todos los puntos en que g sea distinta de cero y su derivada vale

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-\,g'\,(x)}{[g(x)]^2}$$

7. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO:

La función potencial de exponente entero negativo es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'\,(x) = -\,n \cdot x^{-n-1}$$

8. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

La función logarítmica f(x) = ln (x), que sólo está definida para los números positivos, es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

9. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE REAL:

La función potencial de exponente real $f(x) = x^{a}$ es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = x^{a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

Como caso particular tenemos la derivada de la raíz n-ésima (que se deduciría escribiéndola como potencia de exponente fraccionario y derivando):

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Y para la raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE a:

La función logarítmica de base un número real a (positivo y distinto de 1), que está definida sólo para números positivos, es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

11. DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE a:

La función exponencial de base un número real a (positivo y distinto de 1) es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$$

Como caso particular podemos considerar la función exponencial de base el número e, que suele llamarse simplemente función exponencial, cuya derivada es

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Ésta es la única función que coincide con su derivada.

12. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

A. La función seno es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

B. La función coseno es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

C. La función tangente es derivable siempre que exista y su derivada vale

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

13. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

A. La función arco seno, definida en [-1,1], es derivable en (-1,1) y su derivada vale

$$f(x) = \text{arc sen } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

B. La función arco coseno, definida en [-1,1], es derivable en (-1,1) y su derivada vale

$$f(x) = \text{arc cos } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

C. La función arco tangente es siempre derivable y su derivada vale

$$f(x) = \text{arc tg } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

14. DERIVADA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. REGLA DE LA CADENA:

Dadas dos funciones f y g, si la función f es derivable en un punto x y la función g es derivable en el punto f(x), la función compuesta gBf es derivable en el punto x y su derivada vale

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

15. DERIVADA DE LA FUNCIÓN RECÍPROCA O INVERSA:

Si una función f es inyectiva y derivable, con derivada distinta de cero, la función recíproca o inversa f^{-1} también es derivable y su derivada vale

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

16. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA:

Es un método que permite calcular fácilmente muchas derivadas y que consiste en tomar logaritmos neperianos en los dos miembros de la función y derivar a continuación.

Ejemplo:

$y = x^{\operatorname{sen} x}$ $\qquad \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x$

$\operatorname{Ln}(y) = \ln(x^{\operatorname{sen} x})$ $\qquad y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right] \cdot y$

$\operatorname{Ln}(y) = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$ $\qquad y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right] \cdot x^{\operatorname{sen} x}$

17. DERIVACIÓN IMPLÍCITA:

Es un método que se emplea cuando resulta difícil escribir la función a derivar en la forma $y = f(x)$.

Ejemplo:

$2x \cdot y^2 + 3y = 5$

$2y^2 + 2y \cdot y' \cdot 2x + 3y' = 0$

$$y' = \frac{-2y^2}{4xy + 3}$$

PENDIENTE DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL.

Como vimos en la interpretación geométrica de la derivada, ésta es la pendiente de la recta tangente a la función (realmente a la gráfica de la función) en el punto de coordenadas $P(a, f(a))$, por lo que la **ecuación de la recta tangente** será:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

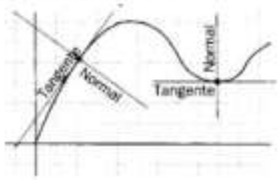
NOTA: Para calcular la ecuación de la recta tangente utilizamos la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m.(x - x_1)$

La normal a una curva en un punto $P(a, f(a))$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, la pendiente de la normal será $m_N = -\frac{1}{f'(a)}$ (ya que el producto de ambas debía ser -1) y **la ecuación de la recta normal** nos viene dada por:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)}$$

Si f ´(a) = 0, la recta tangente será horizontal y de ecuación y = f(a). En ese caso la recta normal es vertical y de ecuación x = a.



Kudriavtsev, L. D. y otros (1992): "Problemas de análisis matemático. Integrales. Series". Mir Moscú

EJEMPLOS.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Calculamos la derivada de la función dada en el punto que nos indican. Aplicando la propia definición tendremos:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2^3+3.2^2h+3.2h^2+h^3)-2^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3.2^2h+3.2h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(3.2^2+3.2h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3.2^2+3.2h+h^2)=3.2^2=12$$

En consecuencia, $f'(2)=12 \Rightarrow m_t=f'(2)=12$ y $m_N=-\frac{1}{f'(2)}=-\frac{1}{12}$

Una vez que hemos obtenido las pendientes de las rectas tangente y normal a la curva, podemos escribir sus ecuaciones, utilizando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

Si tenemos en cuenta que el punto de tangencia tiene por coordenadas $\mathbf{(2, f(2)) = (2, 8)}$, las ecuaciones de las rectas pedidas son:

Ecuación de la recta tangente: $y-8=12.(x-2) \Rightarrow y=2x-16$

Ecuación de la recta normal: $y-8=-\frac{1}{12}\cdot(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{12}\cdot x+\frac{49}{6}$

2. Dada la parábola de ecuación $\mathbf{y = x^2 - 8x + 12}$, hallar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas.

Calculamos la derivada de la función dada en un punto cualquiera *x*:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - 8x + 12) - (x^2 - 8x + 12)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 12) - (x^2 - 8x + 12)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 8h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h.(2x + h - 8)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h - 8) = 2x - 8$$

Como la tangente es paralela al eje de abscisas, las dos rectas tendrán igual pendiente: si tenemos en cuenta que la pendiente del eje de abscisas es igual a cero, al igualar la derivada a cero nos queda:

$$m_t = f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Obtenida la abscisa del punto de tangencia, la ordenada correspondiente del punto la obtenemos sustituyendo en la función: $f(4) = 4^2 - 8.4 + 12 = -4$

En consecuencia, el punto de tangencia tiene por coordenadas (4, –4).

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO.

La expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ representa el cociente entre la variación de la variable dependiente (función) y la variación experimentada por la variable independiente, por este motivo se le denomina razón media de cambio de la función f(x), cuando se toma el límite a esta expresión en que $\Delta x \to 0$, es decir la derivada, se le denomina también razón instantánea de cambio.

Este concepto se aplica también en cinemática al expresar la posición de un cuerpo con movimiento unidimensional en función del tiempo $x = x(t)$, en tal caso la razón instantánea de cambio de la posición, corresponde al concepto de rapidez instantánea.

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Para encontrar entonces la razón de cambio se debe determinar en primer lugar la relación entre las variables mediante una función y posteriormente obtener su derivada.

EJEMPLO:

1. Encontrar la rapidez de variación del volumen de un cubo con respecto a la longitud de un lado.

SOLUCIÓN:

Si la relación entre el volumen de un cubo (V) y la longitud de uno de sus aristas (a) es:

$V = a^3$ entonces obteniendo dV/da se tiene la variación, esto es: $V' = 3a^2$

2. Un hombre de 1,8 metros de altura se encuentra cerca de un poste con su luz encendida a 4 metros de altura, si el hombre se aleja del poste con una rapidez de 0,5 m/s. ¿Con que rapidez se alarga su sombra?

Sol.: $\frac{dS}{dt} = 0{,}41\ m/s$

3. Una escalera que tiene una longitud **L** (m) está apoyada en una pared, si su punto de apoyo con el suelo resbala alejándose de ella con una rapidez de 0,6 m/s, ¿Con que rapidez descenderá el punto de apoyo en la pared cuando el extremo en el piso esté a 1,5 m de la pared?

Sol.: $\frac{dy}{dt} = 0{,}346\ m/s$

Ejercicios de derivadas

I. Halle la primera derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 12$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 3x^2 - 5$
4. $f(x) = x^3 + 5x - 9$
5. $f(x) = \frac{x}{x+2}$
6. $f(x) = \frac{3x+2}{2x}$
7. $f(x) = \frac{5x^2 - x}{x-2}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$
9. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$
11. $f(x) = (3x-8)^3$
12. $f(x) = 4(2x+7)^2$
13. $f(x) = \frac{6}{x-6}$
14. $f(x) = \left(\frac{2}{x-8}\right)^2$
15. $f(x) = \frac{2}{x^3 - 1}$
16. $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$
17. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 5x}$
18. $f(x) = \sqrt{7 - x}$
19. $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$
20. $f(x) = \frac{x-1}{2+x}$

II. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto dado.

Función	Punto de tangencia	Función	Punto de tangencia
1. $f(x) = x^2 + 3$	(1, 4)	4. $-2x^3$	(-3, 54)
2. $f(x) = x^2 - 4x + 4$	(-2, 16)	5. $\sqrt{x+2}$	(4, 6)
3. $f(x) = 2x^3$	(3, 54)	6. $f(x) = \frac{1}{x+3}$	(-4, -1)

III. Resuelva los siguientes problemas.

1. La altura *h* en el intante *s* de una moneda que se deja caer desde el techo de un edificio, viene dada por *h(s)=-16s²+1350*, con *h* medida en metros y *s* en segundos $\left(h'(s) = -32t\right)$

   a. Determine la velocidad media en el intervalo $[1, 2]$.

b. Determine la velocidad instantánea para $s = 1$ y $s = 2$.

c. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

d. Halle la velocidad de la moneda al golpear en el suelo.

2. La velocidad de un automóvil que arranca del reposo está dada por $v(t) = \frac{100t}{2t+15}$, con v medida en metros por segúndo. Determine la aceleración tras:

a. 5 segundos

b. 10 segundos

c. 22 segundos

IV. Halle la tercera derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$
2. $f(x) = \frac{2-x}{x}$
3. $f(x) = (x-2)(x^2 + 1)$
4. $f(x) = \sqrt{x-2}$
5. $f(x) = \frac{(x^2-1)}{x+3}$
6. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$

V. Realice las siguientes derivaciones implícitas.

1. $x^3 + y^3 = 27$
2. $x^2 + y^2 = 16$
3. $x^3 - y^3 = 8$
4. $y^2 = \frac{x^2-9}{x^2+9}$
5. $\sqrt{xy} = x - 3y$
6. $xy = 2x - 4y$