San Marcos

INECUACIONES

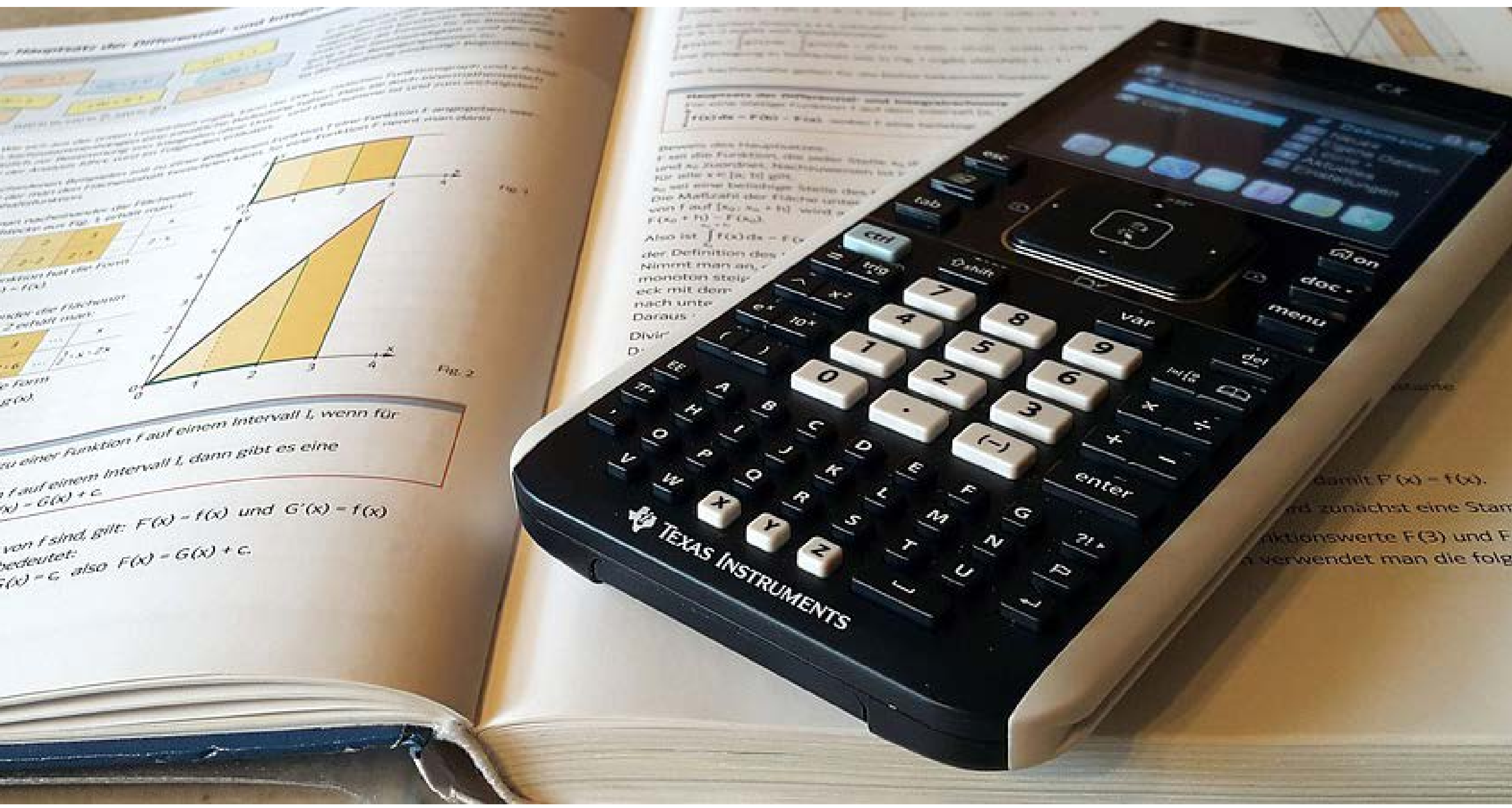
AUTOR: JIMENA SANABRIA

OCTUBRE: 2019

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En esta lectura se desarrolla el paso a paso para determinar el conjunto solución de distintos tipos de ecuaciones, entre ellas, ***ecuaciones lineales, cuadráticas, con radicales, con valor absoluto, de grado mayor que dos, fraccionarias y sistemas de ecuaciones***.

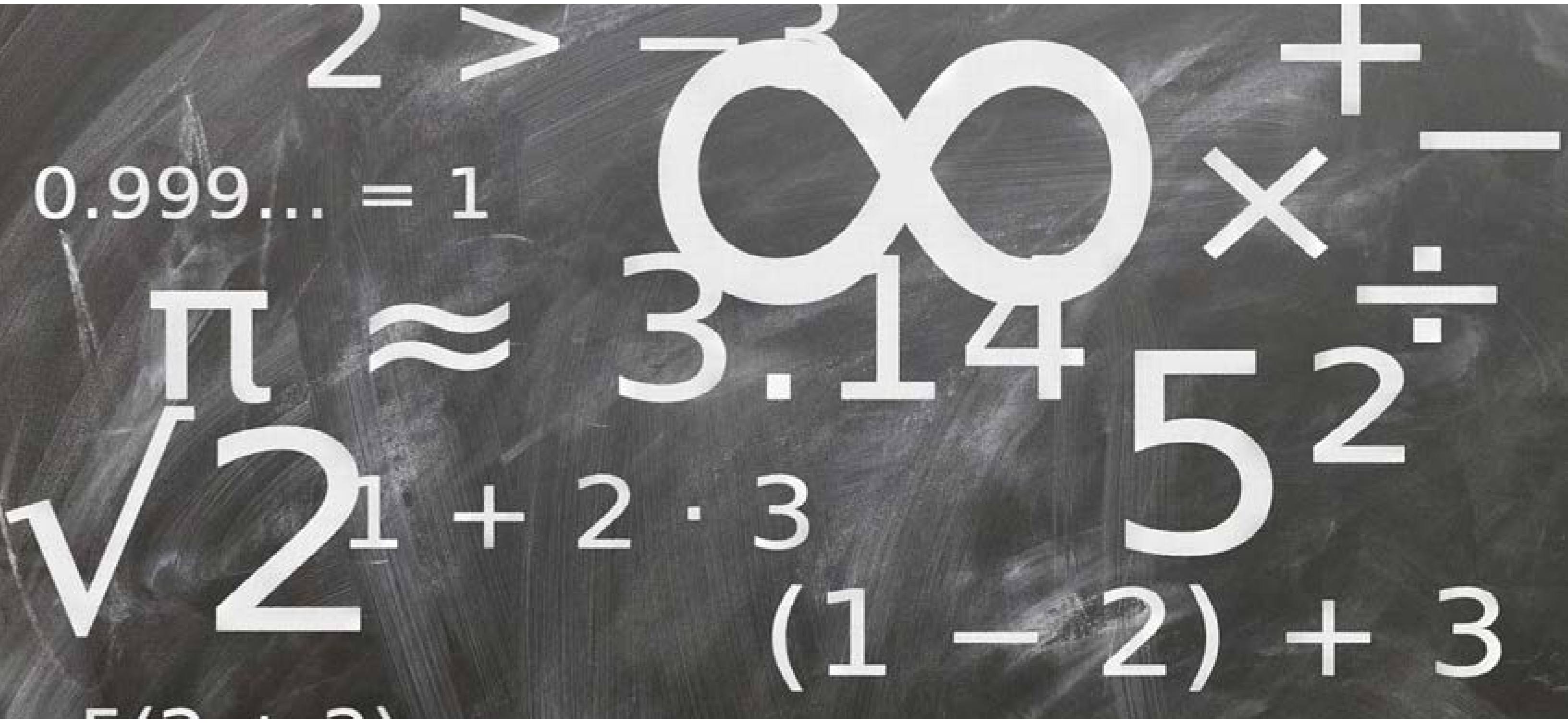


PREGUNTA DISPARADORA

¿Cómo utilizar la simbología matemática (inecuaciones) para la resolución de problemas?

ABSTRACT O RESUMEN

Se explica el paso a paso cómo encontrar el conjunto solución de distintas inecuaciones.



PALABRAS CLAVE

Inecuaciones

lineales

Cuadráticas

Grado mayor que dos

Valor absoluto.

Inecuaciones lineales

Las relaciones que se expresan mediante desigualdades se llaman inecuaciones y en ellas pueden aparecer una o más incógnitas. Resolver la inecuación significa hallar el conjunto de valores que la hacen cierta. A este conjunto se llama conjunto solución.

Recuerde que el conjunto solución de una inecuación se representa mediante intervalos, para las inecuaciones lineales, se utilizarán los intervalos al infinito:

$x \geq a$	$[a, +\infty[$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
$x > a$	$]a, +\infty[$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, x > a\}$
$x \leq b$	$]-\infty, b]$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
$x < b$	$]-\infty, b[$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, x < b\}$

Nota: Si al finalizar de despejar, un número real que multiplica o divide a la variable es <u>negativo</u>, cuando se debe trasladar dicho número, se debe <u>invertir</u> la desigualdad.

Ejemplos: Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales.

$5x - 6 \geq 2x + 3$	
$5x - 2x \geq 3 + 6$	Acomodar monomios con letra $\geq$ monomios sin letra, cambiando de signo
$3x \geq 9$	Sumar o restar cada lado de la desigualdad
$x \geq \frac{9}{3}$	Pasar a dividir el número que multiplica la x
$x \geq 3$	Simplificar si es posible
$S = [3, +\infty[$ ó $S = \{x \,/\, x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$	Indicar el conjunto solución

$$y(2y-3)-4 \geq (y+1)^2+y^2$$

$$2y^2-3y-4 \geq y^2+2y+1+y^2$$
Realizar la multiplicaciones de monomios por los polinomios respectivos y desarrollar la fórmula notable

$$2y^2-3y-y^2-2y-y^2 \geq 1+4$$
Acomodar monomios con letra ≥ monomios sin letra, cambiando de signo

$$-5y \geq 5$$
Sumar o restar monomios semejantes a cada lado de la desigualdad

$$y \leq \frac{5}{-5}$$
Pasar a dividir el número que multiplica la y, recordar invertir la desigualdad por ser negativo

$$y \leq -1$$
Simplificar si es posible

$$S =]-\infty, -1] \text{ ó } S = \{y \,/\, y \in \mathbb{R}, y \leq -1\}$$
Indicar el conjunto solución

$$z - \frac{2-z}{3} > \frac{z-1}{2}$$

$$z - \frac{2}{3} + \frac{z}{3} > \frac{z}{2} - \frac{1}{2}$$
Separar las fracciones y cambiar de signo por el negativo previo a la fracción

$$z + \frac{z}{3} - \frac{z}{2} > \frac{-1}{2} + \frac{2}{3}$$
Acomodar monomios con letra > monomios sin letra, cambiando de signo

$$\frac{5z}{6} > \frac{1}{6}$$
Sumar o restar cada lado de la desigualdad

$$z > \frac{1}{6} \div \frac{5}{6}$$
Pasar a dividir el número que multiplica la z

$$z > \frac{1}{5}$$
Simplificar si es posible

$$S = \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[\text{ ó } S = \left\{z \,/\, z \in \mathbb{R}, z > \frac{1}{5}\right\}$$
Indicar el conjunto solución

PRÁCTICA

1. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

   1. $5 - x \leq 12$ — $S = [-7, +\infty[$
   2. $\frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{3} > 3$ — $S = \left]\frac{31}{5}, +\infty\right[$
   3. $\frac{5}{6}(3-x) - \frac{1}{2}(x-4) \geq \frac{1}{3}(2x-3) - x$ — $S = \left]-\infty, \frac{11}{2}\right]$
   4. $7(3-x) \geq 5$ — $S = \left]-\infty, \frac{16}{7}\right]$
   5. $\frac{3-\frac{1}{3}x}{3+\frac{1}{2}} \geq \frac{3x-\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}}$ — $S = \left]-\infty, \frac{351}{382}\right]$

6. $\frac{3x+1}{4} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{15}(3x+2) + \frac{4(1-x)}{3}$ $\qquad S = [1, +\infty[$

7. $-\frac{x-1}{4} + 1 < \frac{3x-3}{2}$ $\qquad S = \left]\frac{11}{7}, +\infty\right[$

8. $\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{4} > \frac{x-3}{2} - 1$ $\qquad S =]-\infty, 5[$

9. $(x-2)^2 \geq (x+2)(x-2) + 8$ $\qquad S =]-\infty, 0]$

10. $(x-1)^2 < x(x-4) + 8$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$

11. $3 - (x-6) \leq 4x - 5$ $\qquad S = \left[\frac{14}{5}, +\infty\right[$

12. $\frac{3x-5}{4} - \frac{x-6}{12} < 1$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{21}{8}\right[$

13. $1 - \frac{x-5}{9} < 9 + x$ $\qquad S = \left]\frac{-67}{10}, +\infty\right[$

14. $\frac{x+6}{3} - x + 6 \geq \frac{x}{15}$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{120}{11}\right]$

15. $2x - 3 < 4 - 2x$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$

16. $5 + 3x \leq 4 - x$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{-1}{4}\right]$

17. $4 - 2t > t - 5$ $\qquad S =]-\infty, 3[$

18. $x + 8 \leq 3x + 1$ $\qquad S = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$

19. $2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 3x$ $\qquad S =]-\infty, -1[$

20. $\frac{a+2}{4} \leq \frac{a-1}{3}$ $\qquad S = [7, +\infty[$

21. $3x - 12 \leq \frac{5x-6}{4}$ $\qquad S =]-\infty, 6]$

22. $3(4-x) > 18x + 5$ $\qquad S = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

23. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{6}$ $\qquad S =]5, +\infty[$

24. $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$ $\qquad S =]-\infty, -2]$

25. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x-14}{2} - 2$ $\qquad S = \left]\frac{-124}{11}, +\infty\right[$

26. $-3\left(2 - \frac{1}{3}x\right) + 4\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) > 0$ $\qquad S =]-\infty, 1[$

1. $x - \sqrt{2} > 0$ $\qquad S = \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

Inecuaciones no lineales

Pasos:

1. Colocar todos los términos de un lado de la desigualdad.
2. Factorizar el polinomio.
3. Determinar los valores críticos.
4. Formar la tabla de signos.
5. Indicar el conjunto solución

Ejemplos: Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones no lineales.

$$x^2 - x - 12 > 0$$

$$(x-4)(x+3) > 0$$ Factorizar por inspección

$$x - 4 \neq 0 \qquad x + 3 \neq 0$$ Determinar los valores críticos

$$x \neq 0 \color{red}{+ 4} \qquad x \neq 0 \color{red}{- 3}$$

$$x \neq 4 \qquad x \neq -3$$

$-\infty \qquad \mathbf{-3} \qquad \mathbf{4} \qquad +\infty$

$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$

Formar tabla de signos

$$S =]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$$

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $>$, se toma los intervalos con signo positivo

$$x^2 - 2x \leq 0$$

$$x(x-2) \leq 0$$ Factorizar por factor común

$$x = 0 \qquad x - 2 = 0$$ Determinar los valores críticos

$$x = 2$$

$-\infty \qquad \mathbf{0} \qquad \mathbf{2} \qquad +\infty$

x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$

Formar tabla de signos

$$S = [0, 2]$$

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $\leq$, se toma los intervalos con signo negativo

$$x^2 + 2x - 1 \geq 8x - 10$$

$$x^2 + 2x - 1 \color{red}{- 8x + 10} \geq 0$$ Colocar todos los términos de un lado de la desigualdad

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$ Sumar o restar términos semejantes

$$(x-3)^2 \geq 0$$ Factorizar por II fórmula notable

$$(x-3)^2 = 0$$ Determinar el valor crítico

$$x - 3 = 0$$

$-\infty \qquad\qquad +\infty$

$x = 0 + 3$
$x = 3$

	3	
$(x-3)^2$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$+$

$S = \mathbb{R}$

Formar tabla de signos (Al estar elevado al cuadrado siempre será positivo)

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $\geq$, se toma los intervalos con signo positivo

$$-x^2 + 4x - 5 \geq 0$$
$$-(x^2 - 4x + 5) \geq 0$$

Trinomio $\Delta = -4$. No factoriza en $\mathbb{R}$
No hay valores críticos

	$-\infty$ $+\infty$
-1	$-$
$x^2 - 4x + 5$	$+$
$P(x)$	$-$

$S = \emptyset$

Formar tabla de signos

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $\geq$, se toma los intervalos con signo positivo

$$x^4 - x < 0$$
$$x(x-1)(x^2 + x + 1) < 0$$

Factorizar por factor común y diferencia de cubos

$x \neq 0$ $\quad$ $x - 1 \neq 0$
$x \neq 0 + 1$
$x \neq 1$

Determinar los valores críticos

	$-\infty$	0	1 $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + x + 1$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$

$S = \,]0, 1[$

Formar tabla de signos

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $<$, se toma los intervalos con signo negativo

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$$
$$(x-1)(x+1)(x-2) \geq 0$$

Factorizar por agrupación, factor común y diferencia de cuadrados

$x - 1 = 0$	$x + 1 = 0$	$x - 2 = 0$
$x = 0 + 1$	$x = 0 - 1$	$x = 0 + 2$
$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$

Determinar los valores críticos

	$-\infty$	-1	1	2 $+\infty$
$x+1$	$-$ ●	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$ ●	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$ ●	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$S=[-1,1]\cup[2,+\infty[$

Formar tabla de signos

Indicar el conjunto solución, como la inecuación es $\geq$, se toma los intervalos con signo positivo

PRÁCTICA

2. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones no lineales.

a. $(x-1)(x+3)<0$ — $S=]-3,1[$
b. $(x+1)(x-3)>0$ — $S=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$
c. $x(x+4)\leq 0$ — $S=[-4,0]$
d. $(x+7)(x-3)<0$ — $S=]-7,3[$
e. $x^2-5x\leq 0$ — $S=]0,5[$
f. $y^2-4y\leq 0$ — $S=[0,4]$
g. $x^2+2x+1<0$ — $S=\emptyset$
h. $x^2+4x+4\geq 0$ — $S=\mathbb{R}$
i. $z^2+4z+3>0$ — $S=]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$
j. $x^2-7x+10<0$ — $S=]2,5[$
k. $w^2-4w-12\leq 0$ — $S=]-2,6[$
l. $2c^2+3c+1<0$ — $S=\left]-1,\frac{-1}{2}\right[$
m. $4h^2-8h+3>0$ — $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$
n. $x^2+2x-15\geq 0$ — $S=]-\infty,-5]\cup[3,+\infty[$
o. $y<10-3y^2$ — $S=\left]-2,\frac{5}{3}\right[$
p. $x^2+2x-15>0$ — $S=]-\infty,-5[\cup]3,+\infty[$
q. $x^2-8x+12<0$ — $S=]2,6[$
r. $x^2-5x\geq 0$ — $S=]-\infty,0]\cup[5,+\infty[$
s. $3k^2-27<0$ — $S=]-3,3[$
t. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x+5)<0$ — $S=]-\infty,-5[$
u. $(x-4)^2(x+8)^3>0$ — $S=]-8,4[\cup]4,+\infty[$
v. $y^3+2y^2-y-2>0$ — $S=]-2,-1[\cup]1,+\infty[$
w. $x^3+4x^2-x>-4$ — $S=]-4,-1[\cup]1,+\infty[$
x. $x^4+x^2\leq 0$ — $S=\emptyset$
y. $x^2-4x+4<0$ — $S=\emptyset$
z. $x^2-16<0$ — $S=]-4,4[$

aa. $x^2 - 12 \leq 0$ — $S = \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$
bb. $a^2 + 6a \leq -9$ — $S = \{-3\}$
cc. $x^2 - 3 > 2x$ — $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
dd. $x^2 \leq 3 - 2x$ — $S = [-3, 1]$
ee. $w^2 + w - 1 \leq 5$ — $S = [-3, 2]$
ff. $u^2 - 10u - 2 \leq 0$ — $S = [-1, 2]$
gg. $y^2 - 3y \geq 0$ — $S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$
hh. $h^2 - 3h + 3 < 0$ — $S = \emptyset$
ii. $k^2 + 2k - 4 < 0$ — $S = \left]-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\right[$
jj. $-(x+1)(x+2)(x+3) < 0$ — $S =]-3, -2[\cup]-1, +\infty[$
kk. $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$ — $S = [-2, -1] \cup [1, 2]$

Inecuaciones con valor absoluto

Propiedades del valor absoluto:
Si a es un número real positivo, entonces:
1. $|x| < a$ si y solo si $-a < x < a$
2. $|x| > a$ si y solo si $x < -a$ ó $x > a$

Ejemplos: Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con valor absoluto.

$$|3x - 5| \leq 2$$
$$-2 \leq 3x - 5 \leq 2$$
Caso 1
$$-2 + 5 \leq 3x \leq 2 + 5$$
Despejar inecuación simultánea
$$3 \leq 3x \leq 7$$
$$\frac{3}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$
$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$
$$S = \left[1, \frac{7}{3}\right] \text{ ó } S = \left\{x / x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq \frac{7}{3}\right\}$$
Indicar conjunto solución

$$|2x + 4| \leq 0$$
$$|2x + 4| = 0$$
Como el valor absoluto de una expresión **nunca** es negativo, se resuelve solamente la ecuación con valor absoluto

$$2x + 4 = 0$$
$$2x = 0 - 4$$
$$2x = -4$$
$$x = \frac{-4}{2}$$
$$x = -2$$

$S = \{-2\}$ Indicar el conjunto solución

$$|3x - 5| \geq 2$$

Caso 2

Despejar cada inecuación

$3x - 5 \leq -2$	$3x - 5 \geq 2$
$3x \leq -2 + 5$	$3x \geq 2 + 5$
$3x \leq 3$	$3x \geq 7$
$x \leq \frac{3}{3}$	$x \geq \frac{7}{3}$
$x \leq 1$	
$]-\infty, 1]$	$\left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$

Indicar cada intervalo

$$S =]-\infty, 1] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$$

Indicar el conjunto solución

$$|2x + 4| \geq 0$$
$$S = \mathbb{R}$$

Como el valor absoluto de una expresión **siempre** es positivo o igual a cero, el conjunto solución son los reales

PRÁCTICA

3. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaicones con valor absoluto.

a. $|x - 2| < 1$
b. $|5x - 7| \leq 3$
c. $2|3 - x| - 10 \geq 0$
d. $|5 - 2x| \leq 7$
e. $|2x - 3| \leq -5$
f. $|7 - 2x| \geq -6$
g. $|5x + 2| > 0$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, A. y Artavia, J. (2013). *Ejercicios de Matemática para Adminsitración.*Precálculo. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Ayres, F. (1982). Fundamentos de matemáticas superiores. México: Mc Graw Hill.

Baldor, J. (1967). Geometría y trigonometría. España: Vasco Americana.

Keedy, M. L. y Bittinger, M. L. (1981). Algebra y trigonometría. Bogotá: Fondo Edu- cativo Interamericano.

Nichols, E. (1974). Álgebra moderna elemental. México: CECSA.

Taylor, H. y Wade, T. (1970). Matemáticas básicas. México: Limusa.

APÉNDICES

SOLUCIONES

1. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

1. $S = [-7, +\infty[$
2. $S = \left]\frac{31}{5}, +\infty\right[$
3. $S = \left]-\infty, \frac{11}{2}\right]$
4. $S = \left]-\infty, \frac{16}{7}\right]$
5. $S = \left]-\infty, \frac{351}{382}\right]$
6. $S = [1, +\infty[$
7. $S = \left]\frac{11}{7}, +\infty\right[$
8. $S =]-\infty, 5[$
9. $S =]-\infty, 0]$
10. $S = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$
11. $S = \left[\frac{14}{5}, +\infty\right[$
12. $S = \left]-\infty, \frac{21}{8}\right[$
13. $S = \left]\frac{-67}{10}, +\infty\right[$
14. $S = \left]-\infty, \frac{120}{11}\right]$
15. $S = \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$
16. $S = \left]-\infty, \frac{-1}{4}\right]$
17. $S =]-\infty, 3[$
18. $S = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$
19. $S =]-\infty, -1[$
20. $S = [7, +\infty[$
21. $S =]-\infty, 6]$
22. $S = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$
23. $S =]5, +\infty[$
24. $S =]-\infty, -2]$
25. $S = \left]\frac{-124}{11}, +\infty\right[$
26. $S =]-\infty, 1[$
27. $S = \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

3. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones no lineales.

a. $S =]-3,1[$
b. $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
c. $S = [-4, 0]$
d. $S =]-7, 3[$
e. $S =]0, 5[$
f. $S = [0, 4]$
g. $S = \emptyset$
h. $S = \mathbb{R}$
i. $S =]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$
j. $S =]2, 5[$
k. $S =]-2, 6[$
l. $S = \left]-1, \frac{-1}{2}\right[$
m. $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
n. $S =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$
o. $S = \left]-2, \frac{5}{3}\right[$
p. $S =]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$
q. $S =]2, 6[$
r. $S =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$
s. $S =]-3, 3[$
t. $S =]-\infty, -5[$
u. $S =]-8, 4[\cup]4, +\infty[$
v. $S =]-2, -1[\cup]1, +\infty[$
w. $S =]-4, -1[\cup]1, +\infty[$
x. $S = \emptyset$
y. $S = \emptyset$
z. $S =]-4, 4[$
aa. $S = \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$
bb. $S = \{-3\}$
cc. $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
dd. $S = [-3, 1]$
ee. $S = [-3, 2]$
ff. $S = [-1, 2]$
gg. $S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$
hh. $S = \emptyset$
ii. $S = \left]-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\right[$
jj. $S =]-3, -2[\cup]-1, +\infty[$
kk. $S = [-2, -1] \cup [1, 2]$

3. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaiciones con valor absoluto.

a. $S =]1, 3[$
b. $S = \left[\frac{4}{5}, 2\right]$
c. $S =]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$
d. $S = [-1, 6]$
e. $S = \emptyset$
f. $S = \mathbb{R}$
g. $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{5}\right\}$