GEOMETRÍA ANALÍTICA

AUTOR: PEDRO JULIÁN GONZÁLEZ

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta rama de la matemática ha tenido una gran trascendencia a lo largo de la historia ya que a partir del estudio de las proporciones y singularidades de las distintas figuras que se ubican en un plano o en el espacio, ha aportado de gran manera en el crecimiento de la lógica y la ciencia en pro de la humanidad.

Esta disciplina, cuyo objetivo es analizar dichas figuras a partir de un sistema de coordenadas, haciendo uso de métodos propios del análisis matemático y en general del álgebra, intenta obtener la respectiva ecuación de los sistemas de coordenadas en función de su ubicación geométrica. De igual forma, permite determinar dicho lugar en referencia de los puntos que forman parte de la ecuación de este sistema de coordenadas.

Geometría analítica

Figura 1.
Fuente: Shutterstock/238334089

Líneas rectas

Normalmente una línea la componen varios puntos, siendo éste último la unidad gráfica mínima en geometría. También podría definirse como una consecución de puntos que se ubican uno junto al otro que dan como resultado un trazo continuo.

Cuando dichos puntos tienen siempre la misma dirección, es cuando se hace referencia a una línea recta.

Circunferencia y círculo

La circunferencia puede definirse como una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de uno fijo denominado centro.

Un círculo a su vez se define como la parte del plano limitada por una circunferencia.

Aquí también es importante incluir la definición de radio, que se conoce como el segmento que tiene por extremos el centro y un punto cualquiera de la circunferencia; así entonces, todos los infinitos radios de la circunferencia son semejantes.

Arco, diámetro, sector y segmento circular

El arco de una circunferencia hace referencia a una parte de ella, limitada solamente por dos puntos que se denominan extremos.

El segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia, se conoce como cuerda.

De igual manera cualquier cuerda, que pase por el centro se denomina diámetro. Se entiende entonces, que un diámetro es igual al doble de cualquier radio y también todos los diámetros son iguales. Cada diámetro logra dividir a la circunferencia y a su correspondiente círculo en dos partes iguales denominadas semicírculo y semicircunferencia.

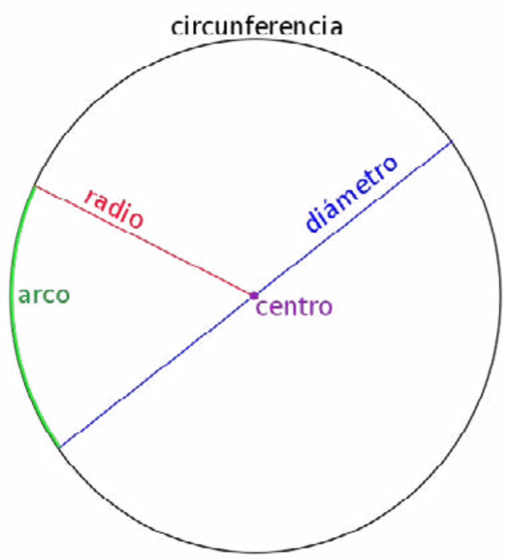

Figura 2. Circunferencia y círculo
Fuente: https://goo.gl/images/AYN62F

Parábola

Esta se puede definir como el lugar geométrico de los puntos de un plano paralelos a una recta dada, llamada directriz, y a un punto fijo el cual se denomina foco.

Instrucción

Para conocer los elementos de una parábola observemos el recurso: galería, disponible en la página principal del curso.

Ecuación reducida de la parábola

Para este caso, el eje de la parábola concuerda con el de abscisas y el vértice con el origen de coordenadas.

Ejemplo:

Teniendo la parábola $y^2 = 8x$, calcule su vértice, su foco y la correspondiente recta directriz.

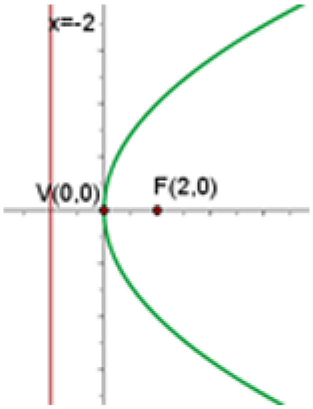

Figura 3. Ecuación reducida de la parábola
Fuente: propia

$2p = 8 \quad p/2 = 2$

Por tanto:

V (0,0) F (2,0) x= -2

Ecuación reducida de la parábola del eje vertical

Para este caso, el eje de la parábola concuerda con el eje de ordenadas y el vértice, con el origen de coordenadas.

Ejemplo:

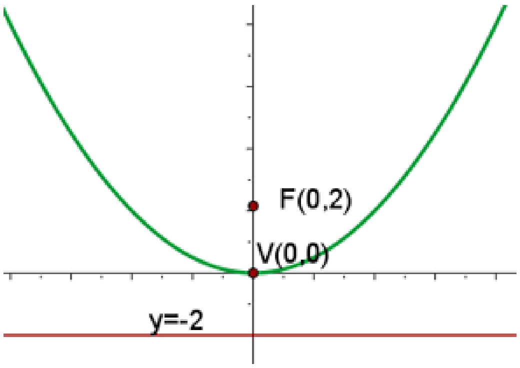

Figura 4. Ejemplo de ecuación reducida de la parábola del eje vertical
Fuente: propia

Se tiene la parábola $x^2=8y$ (ver figura anterior), se debe calcular su correspondiente vértice, su foco y la recta directriz.

$2p= 8$ $p/2 =2$

Por tanto:

V (0,0) F (0,2) y=-2

La elipse

Se le denomina como el lugar geométrico de los puntos del plano en donde al sumar las distancias a dos puntos (llamados focos) es constante (este valor es representado usualmente por 2a).

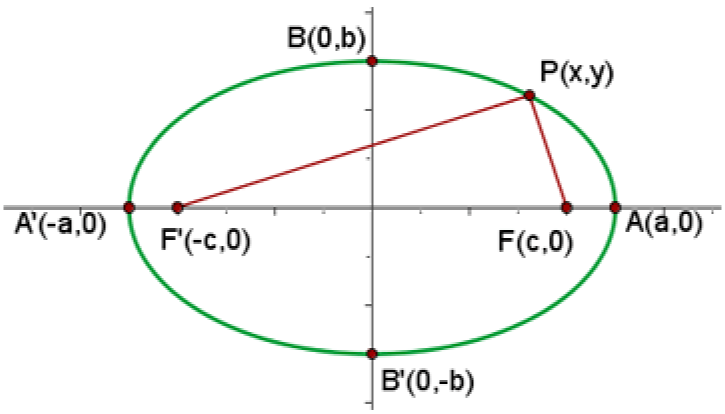

Figura 5. Elipse
Fuente: https://bit.ly/2LgxhmX

Instrucción

Observemos los elementos que contiene la elipse en el recurso: nube de palabras, también lo invitamos a realizar la actividad práctica de aprendizaje, se encuentran disponibles en la página central del módulo.

Excentricidad de la elipse

Esta se puede calcular como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor.

$e = c/a$ donde $c <= a$ $0 <= e <= 1$

Ejemplo:

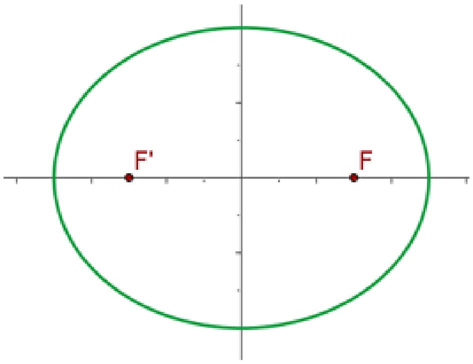

Figura 6. Ejemplo de excentricidad de la elipse
Fuente: propia

Para el anterior ejemplo la excentricidad está dada por $e = 3/5$

Ecuación reducida de la elipse

Para este caso, se toma como centro de la elipse el centro de coordenadas y los correspondientes ejes de la elipse como ejes de coordenadas.

Ejemplo:

Hallar todos los elementos que caracterizan la elipse y su correspondiente ecuación reducida focos: F'(-3, 0) y F (3, 0), y su eje mayor mide 10.

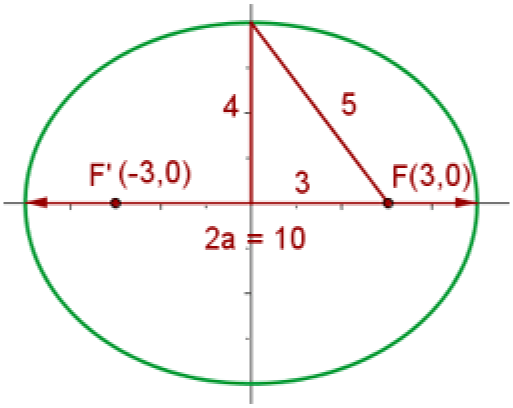

Figura 7. Ejemplo para ecuación reducida de la elipse
Fuente: propia

El semieje mayor 2a =10

La semidistancia focal FF' = 2c = 6

Semieje menor b^2=25-9

Ecuación reducida

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

La excentricidad e= 3/5

Ecuación reducida de la elipse de eje vertical

Dado que el eje principal esté en el de ordenadas, se logra obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Y las correspondientes coordenadas de los focos son:

F' (0, -c) y F (0, c)

Ejemplo:

Se tiene una ecuación reducida:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Hallar, las correspondientes coordenadas de los vértices, de los focos y la ecuación de excentricidad.

a= $\sqrt{9}$

b= $\sqrt{4}$

A (0,3) A' (0,-3)

B (2,0) B' (-2,0)

C= $\sqrt{9-4}$

La ecuación de la elipse

Para el caso en el que el centro de la elipse C (x_0, y_0) y el correspondiente eje principal es paralelo a 0X, los focos tienen de coordenadas F (x_0 + c, y_0) y F' (x_0 - c, y_0). De esta forma la ecuación de la elipse ha de ser:

$$\frac{(x-x0)^2}{a^2} - \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$$

$AX^2 + BY^2 + CX + DY + E = 0$

Ejemplo:

Debe hallarse la ecuación de la elipse cuyo foco F (7, 2), y vértice A (9, 2) y centro C (4, 2).

a= 9-4

c= 7 – 4

b= $\sqrt{25-9}$

$$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y-2^2}{16} = 1$$

Ecuación de la elipse del eje vertical

Para el caso en el que el centro de la elipse C(x0, y0) y el correspondiente eje principal es paralelo a OY, los correspondientes focos tendrán de coordenadas F(x0, y+c) y F’ (x0, y0-c). La correspondiente ecuación ha de ser:

$$\frac{(y-y0)^2}{a^2} - \frac{(x-x0)^2}{b^2} = 1$$

$$AX^2 + BY^2 + CX + DY + E = 0$$

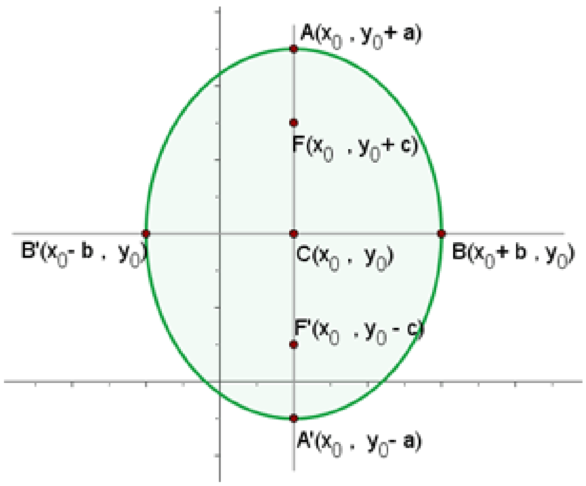

Figura 8. Ecuación de la elipse del eje vertical
Fuente: propia

La hipérbola

Esta se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus correspondientes distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es equivalente a una constante positiva e inferior que la distancia entre dichos focos.

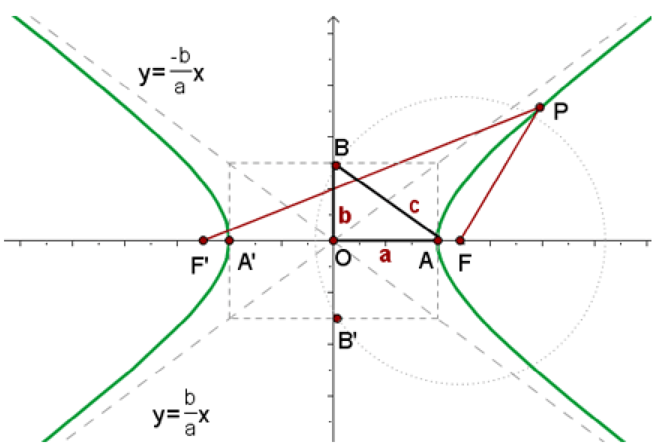

Figura 9. Hipérbola
Fuente: https://bit.ly/2zKhnA0

Elementos que componen la hipérbola:

- Focos: se pueden entender como los puntos fijos F y F'.
- Eje principal o real: se define como la recta que pasa a través de los focos.
- Eje secundario: es la mediatriz del segmento FF'.
- Centro: se conoce como el punto de intersección de los ejes.
- Vértices: los puntos A y A' se conocen como los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
- Los puntos B y B' se logran obtener como la intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.
- Radios vectores: son aquellos segmentos que van inician en un punto de la hipérbola y se dirigen a los focos: PF y PF'.
- Distancia focal: se conoce como el segmento FF' segmento de longitud 2c.
- Eje mayor: se conoce como el segmento AA' segmento de longitud 2a.
- Eje menor: se conoce como el segmento BB' segmento de longitud 2b.
- Eje de simetría: es la recta que contiene al eje real o al eje imaginario.
- Asíntotas: Se conocen como las rectas de ecuaciones: $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$
- Relación entre los semiejes: $c^2 = a^2 + b^2$

Excentricidad de la hipérbola

Esta, mide la abertura mayor o menor de las correspondientes ramas de la hipérbola.

$$E = \frac{c}{a} \text{ donde } c>=a \ e>=1$$

Ecuación reducida de la hipérbola

Aquí, los ejes coinciden con los ejes coordenadas, y, de esta manera, el centro de hipérbola con el origen de coordenadas.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos valores son: foco F (4, 0), vértice A (2, 0) y de centro C (0, 0).

C (0,0)   F (4,0)   A (2,0)

a=2 c=4 b= $\sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

Ecuación de la hipérbola equilátera

Para el caso en que las hipérbolas poseen los semiejes iguales se denominan equiláteras, por tanto a = b. Y su ecuación es:

$$X^2 - y^2 = a^2$$

De igual manera las asíntotas están definidas por la ecuación:

$$y = x, y = -x$$

Estas son las bisectrices de los cuadrantes y la excentricidad se define como:

$$e = \sqrt{2}$$

Lectura recomendada

Antes de la evaluación lo invitamos a realizar las siguientes lecturas complementarias sobre los siguientes temas abordados:

- *La elipse*

  Luis Castro Pérez

- *La hipérbola*

  Luis Castro Pérez

- *Historia de la geometría*

  Pedro Miguel González

Instrucción

Para finalizar lo invitamos a realizar la actividad de evaluación del eje 4, disponible en el panel de tareas de la plataforma.

BIBLIOGRAFÍA

Bloom, P. (1994). Generativity within language and other cognitive domains. *Cognition, 51*(2), 177-189.

Rodríguez, J. (2005). *Fundamentos de matemática*. México, México: Universidad Nacional Autónoma de México.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr
San José, Costa Rica