FUNCIONES Y RELACIONES

AUTOR: PEDRO JULIÁN GONZÁLEZ

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La era que se vive actualmente, se ha catalogado como la era de la información. De esta manera, los datos se pueden mostrar de diversas formas: tablas de valores, gráficos, todo esto son la materia prima de dicha información. En esencia, los datos son numéricos y las relaciones que se logran establecer entre ellos, caracterizan su importancia en el abastecimiento de información sobre fenómenos sociales, naturales o económicos, solo por citar algunos.

La noción de función admite estudiar un tipo de relaciones que se establece entre datos y, por lo tanto, generar acciones sobre la información suministrada a través de sus elementos. Acciones como prever, conjeturar, proyectar, suponer, son el producto del conocimiento y utilización de todos los elementos y propiedades básicas de la función.

Funciones y relaciones

Función

La recolección de datos acerca de diferentes situaciones, se basa en la idea de relacionar elementos de dos conjuntos (por lo general son numéricos), y en su presentación, de tal forma que la información sea legible y sirva como punto inicial de la identificación de regularidades y, por lo tanto, de patrones de comportamiento de los datos. Si X e Y son dos conjuntos, una función de X en Y es una relación entre los elementos de X e Y, de tal forma que a cada elemento de X le corresponde sólo un elemento de Y. Esta aproximación a la noción de función requiere que:

Todo elemento de X se relacione con un elemento de Y.

La relación de un elemento de X con un elemento de Y sea única.

Conjuntos
Se denomina conjunto a la agrupación de entes o elementos, que poseen una o varias características en común. Es un concepto intuitivo empleado en matemática, que elaboró la teoría de conjuntos. Para saber si un conjunto está bien definido habrá que atender a la siguiente regla: cuando la pertenencia de un elemento a un conjunto es clara, el conjunto estará bien definido. Por ejemplo, nadie dudaría de incluir al domingo entre los días de la semana, pero el conjunto de personas rubias no está bien definido, pues hay dudas si determinadas personas pertenecen o no al conjunto, pues la calidad de rubio no es precisa.

Variable dependiente
Es aquella cuyo valor depende del valor numérico que adopta la variable independiente en la función.

Una forma usada normalmente para presentar datos que relacionan dos conjuntos, es a través del uso de una tabla de valores. Este hecho se representa a continuación, un negociante realiza un registro de las ventas de cierta clase de tela y las muestra así:

Número de metros vendidos	5	9	14	22	45
Valor total de venta	95.000	171.000	266.000	418.000	855.000

Tabla 1. Tabla de valores del registro de ventas
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

La relación que se logra establecer entre el número de metros de tela vendidos y su valor de venta es una función, ya que a cada valor del número de metros de tela vendido corresponde un valor de venta y éste es único.

Un hecho relevante aquí es observar que el valor total de venta, depende del número de metros de tela que se logran vender. De esta forma se entiende, que una función también es una relación de dependencia entre dos cantidades que pueden variar, de tal forma que a cada valor de la variable 1 independiente, le corresponde un valor único de la variable dependiente. Ésta variable, hace referencia al número de metros vendidos y la variable dependiente es el valor como tal de la venta.

Elementos de una función

Si M y N hace referencia a dos conjuntos, entonces quiere decir que una función de M en N, es una regla que asigna a cada elemento x de M un solo elemento y de N. Se nota f: M→ N. El elemento y se denomina la imagen de x mediante f. La imagen de un elemento x se nota también como f (x) que se lee "de x".

Al conjunto M se le denomina el dominio de la función y se nota D_f y el conjunto N se le conoce como el codominio de la función, que se nota Cd_f. Al conjunto de imágenes de la función se le denomina el rango de la función y se simboliza R_f.

La regla de asignación que define una función puede describirse de forma verbal o de forma algebraica.

Video

Con el fin de complementar la información anteriormente expuesta, a continuación, lo invitamos a observar la videocápsula:

Concepto de función

https://www.youtube.com/watch?v=s8-sU3AxTdM

Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

La función inyectiva es una función $f: X \to Y$ (uno a uno) si a cada punto del dom f tiene imágenes diferentes $x_1, x_2 \in dom\ f, x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ En otros términos, f es inyectiva sí $\forall\ x, y \in dom\ f, f(x) = f(y) \to x = y$.

La función suprayectiva es una función $f: X \to Y$ (sobreyectiva) si todo punto de Y es la imagen de un valor de X bajo f.

$$\forall\ y \in Y, \exists x \in \text{dom } f \text{ tal que } y = f(x)$$

Por tanto

f es suprayectiva ←→im f = y

Se puede establecer a partir de la gráfica que f: R ⇒ R es biyectiva cuando toda recta horizontal corta a su gráfica como máximo en un punto y es suprayectiva si toda recta horizontal corta a la gráfica mínimo en un punto.

Gráfica
Esquema representativo de datos estadísticos o numéricos, por medio de símbolos que muestran la relación de los mismos.

Video

Con el fin de complementar la información anteriormente expuesta, lo invitamos a visualizar el video:

Nociones básicas sobre aplicaciones entre conjuntos

https://www.youtube.com/watch?v=wbz7oRTexhI

Dominio y recorrido de una función

Como se estableció anteriormente el dom f $\subset$ X en tanto la ran f $\subset$ Y se pueden establecer los elementos de la variable independiente que intervienen en la función y de acuerdo a estos los valores que intervienen en la variable dependiente.

Por ejemplo el dominio y el rango de:

f (x) = $\sqrt{x-1}$

Por ser una raíz cuadrada la expresión x-1 debe ser mayor que cero entonces:

x -1 > 0 por tanto x >1

Es decir, toma los valores [1, ∞) para el dominio o valores de X, mientras para Y se tiene que $\sqrt{x-1} > 0$ siempre es un valor positivo por tanto el recorrido o rango es [0, ∞).

Dominio de la función compuesta

Una función compuesta puede estar definida por más de una expresión y se puede determinar el dominio y el rango a partir de la definición propia de la función (Larson, 2010).

Por ejemplo determinar el dominio y recorrido de la función compuesta.

f (x) = 1-x si x <1

$\sqrt{x-1}$ si x >=1

Como la función está definida para x<1 y para x >= 1, su dominio es todo el conjunto de los números reales. Donde la función es 1-x el rango siempre es positivo por estar definido en el dominio x<1 y para x >= 1 siempre la imagen es positiva se tiene que el recorrido de la función compuesta es [0, ∞).

Instrucción

En este punto, lo invitamos a desarrollar la actividad práctica, acerca del dominio y rango de una función y a revisar el recurso de aprendizaje: organizador gráfico, los cuáles encuentra disponibles en la plataforma.

Lectura recomendada

Para ampliar sus conocimientos respecto a este tema, lo invitamos a realizar las lecturas:

- *Funciones*

  José Manuel Becerra Espinosa

- *Notas de Álgebra I*

  Ariel Pacetti

Funciones especiales

Constante

Es aquella cuyo valor no depende de ninguna variable, y se puede representar como una función matemática de la forma: $f(x)=h$ donde h hace parte de los números reales y además es una constante.

El dominio de una función constante se define como el conjunto de los números reales y su rango es h.

La correspondiente gráfica es una línea recta que es paralela al eje x, y corta al eje y en $y = h$.

También se puede considerar a esta función, como un caso especial de la función lineal cuando se asigna $x = 0$.

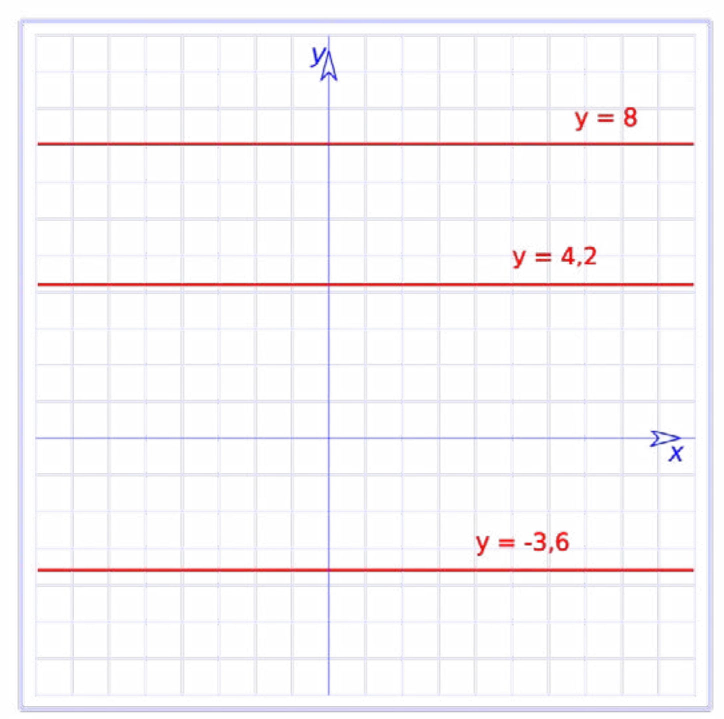

Figura 1. Gráfica de una función constante
Fuente: https://bit.ly/2Ljd3Jk

Idéntica o identidad

Es aquella cuya gráfica es una recta que pasa por el origen, de los ejes coordenadas y su pendiente es m=1.

Pendiente
Inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal (la tangente inversa del valor de la "m" es el ángulo en radianes). P, caso particular de la tangente a una curva cualquiera, en cuyo caso representa la derivada de una función en el punto considerado, y es un parámetro relevante en el trazado altimétrico de carreteras, vías férreas, canales y otros elementos constructivos.

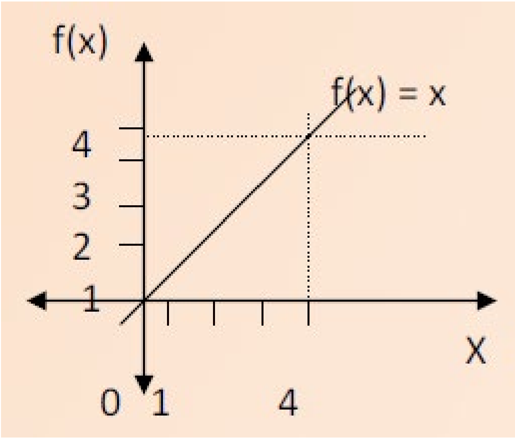

Figura 2. Gráfica de una función identidad o idéntica
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Valor absoluto

Es aquella que se simboliza como |x| y se puede definir como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Figura 3. Representación de una función valor absoluto
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Esto quiere decir que |x|, transforma cualquier valor de x en su idéntico.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

Gráfica de la función $y = |x|$

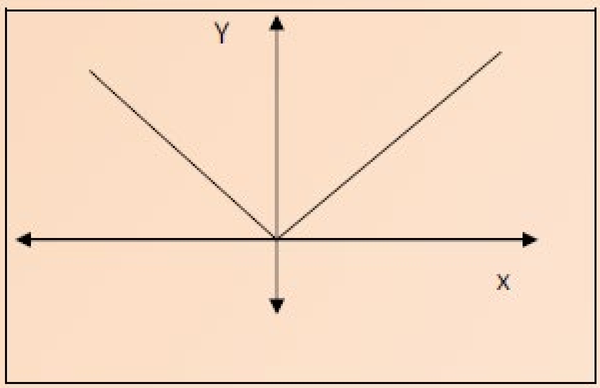

Figura 4. Gráfica de una función valor absoluto
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Por partes o trozos

Este tipo de funciones poseen un dominio definido por varios intervalos y para cada uno de ellos, existe una regla que permite encontrar el correspondiente contradominio. Se debe tomar cada parte como una función independiente, esto para lograr comprenderla con facilidad.

Regla
Ostenta una especial importancia y participación, ya que con la misma se designará a los métodos para llevar a cabo una operación. Los famosos problemas de regla de tres, por ejemplo y que sirven para que podamos calcular el valor de una cantidad comparándola con otras tres cantidades conocidas.

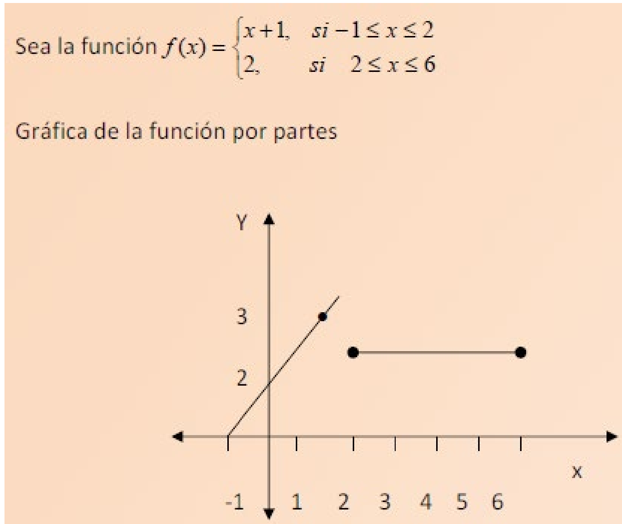

Figura 5. Ejemplo de una función por partes
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Función lineal

Se ha afirmado que la expresión f(x)= a1x + a0 representa una función lineal. Sin embargo es corriente escribir esta expresión en la forma f(x) = mx+b, con m y b reales conocidos.

Si se desea determinar los ceros de f, entonces se tiene que 0 = mx + b, con lo cual x= $-\frac{b}{m}$

Veamos la interpretación geométrica para el valor m de este modelo. Cada par de puntos de una recta en el plano cartesiano cumplen con la siguiente propiedad:

El cociente entre la variación de sus ordenadas (es decir, la variación vertical al pasar de un punto a otro) y la variación de sus abscisas (osea, la variación horizontal al pasar de un punto a otro) es constante. A este cociente se le llama la pendiente de la recta y se nota como m. La siguiente figura muestra dicha propiedad.

Abscisas
Es una línea horizontal que se representa, mayormente, en las coordenadas cartesianas rectangulares y su misión es marcar la distancia existente entre el eje vertical y el centro o un punto cualquiera. El eje de abscisas, por su parte, son tomadas como el conjunto de coordenadas horizontales de un plano cartesiano.

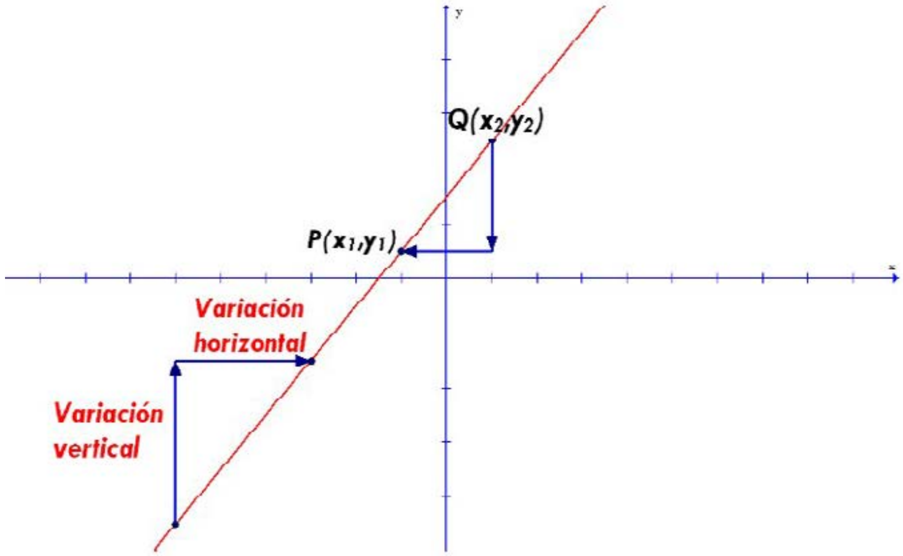

Figura 6. Interpretación de la pendiente de una recta
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

¡Importante!

Se debe tener en cuenta que: dos rectas no verticales son paralelas si sus pendientes son iguales. Además dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es –1.

Una aplicación interesante de la función lineal y de los elementos de una recta se hace en un área de matemáticas, denominada geometría analítica. En esta área se demuestran afirmaciones acerca de figuras geométricas usando el plano cartesiano y algunas nociones asociadas a puntos del plano. Este trabajo es de gran utilidad, pues por ejemplo probar que un triángulo dado es rectángulo requeriría del uso de instrumentos de medición, los cuales no generan seguridad, ni son aceptados en matemáticas como una demostración objetiva, es decir, desprendida del uso de los sentidos.

Triángulo
En geometría plana es un polígono de tres lados. Los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo.

El modelo cuadrático

Es importante revisar los aspectos relacionados con las funciones de la forma f (x) = $a^2x^2 + a^1x + a^0$ con $a^2 \neq 0$, conocida comúnmente como función cuadrática.

Como se ha referido en otro aparte, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales. Identificar los ceros de la función (si existen), significa dar solución a la ecuación $ax^2 + bx + c =$ denominada como ecuación cuadrática.

Se presenta a continuación, la demostración de la validez de una fórmula que resuelve una ecuación cuadrática. Siga cuidadosamente cada una de los argumentos de tal manera que logre explicar el porqué de cada uno de ellos.

Propiedades

$ax^2 + bx + c = 0$	
$ax^2 + bx = 0$	Propiedad de igualdad.
$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$	Factorización.
$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = -c + \frac{b^2}{4a}$	Completar un binomio cuadrado perfecto.
$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$	Factorización.
$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Propiedad de igualdad.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula para resolver la ecuación cuadrática dada.

Figura 7. Propiedades del modelo cuadrático
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Por lo tanto, si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de la función cuadrática intercepta al eje horizontal en un punto, pero si $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica intercepta a dicho eje en dos puntos. De hecho si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de la función no intercepta el eje horizontal.

Función inversa

La idea de construir nuevas funciones a partir de funciones conocidas, hace pensar en la pregunta: ¿Si se intercambian el dominio y el rango de una función f y por consiguiente se intercambian los elementos de cada par ordenado de f, se obtiene una función? Se observa que si un elemento y del rango de f es imagen de al menos dos elementos diferentes x^1 y x^2 del dominio, al efectuar el intercambio propuesto se tendría un elemento y que poseería dos imágenes, lo cual contradice la definición de función. Por lo tanto, para lograr el propósito declarado es preciso que f sea una función uno a uno.

Video

Con el fin de complementar la información anteriormente expuesta, a continuación, lo invitamos a visualizar el video:

Funciones inversas

https://www.youtube.com/watch?v=ufJV4yI2I3Q

Funciones exponenciales

Una función de la forma $f(x) = a^x$ con a un real positivo y diferente de 1, se denomina una función exponencial de base a. En el propósito usual de conocer los elementos que caracterizan a f, se afirma que el dominio de f es el conjunto de los números reales. Para corroborar la afirmación, es importante revisar el significado de x a para distintos números reales x. Por ejemplo, especifique qué significado se da a expresiones como 3 2 2 1 3 0 2 2; 2; 2; 2; 3 – –, etc. Se observa entonces, que para cualquier x real la expresión x a es un número real positivo, así que la gráfica de f no interceptará al eje x pues la ecuación = 0 x a no tiene solución en los reales. Note que la ecuación dada tiene la variable en el exponente de la expresión x a. Este tipo de ecuaciones se denominan exponenciales. Ahora, cualquier gráfica de la forma especificada interceptará al eje vertical en y = 1 pues f (0) =1 para cualquier valor de a. Algunas particularidades del modelo se detallan a continuación.

Ecuación
Una ecuación es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama incógnita y se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", aunque puede utilizarse cualquiera otra letra.

Exponente
Es una expresión algebraica o un simple número que denota la potencia a que se debe elevar otra expresión u otro número (la base).

Ejemplos:

1. Graficar la funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (1/3)^x$, se puede realizar con base en los elementos esenciales de las funciones que se han estudiado previamente. De acuerdo con las notas teóricas, el dominio de las dos funciones es el conjunto de los números reales. Las gráficas de f y g no intersectan el eje horizontal, e intersectan al eje vertical en y = 1. Se pueden ver las particularidades de cada función. Respecto de la función f, es importante analizar el comportamiento de sus imágenes cuando $x \to \infty$. De hecho, si x toma valores positivos muy grandes, la expresión 2^x asumirá también valores positivos muy grandes. Es decir, si $x \to \infty$ entonces $f(x) \to \infty$. Ahora, si $x \to -\infty$, f(x), tendrá valores cada vez más pequeños. De hecho, esta expresión tiende a 0 de acuerdo a una propiedad de los reales estudiada en lectura previa. En síntesis, si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to 0$, por lo que se asegura que f tiene una asíntota horizontal en y = 0. Una tabla de valores ayuda a trazar la gráfica de f.

x	$-3/2$	-1	1	2	$5/2$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	1	2	4	$\sqrt{8}$

Tabla 2. Tabla de valores
Fuente: propia

En cuanto a la función g, al realizar análisis similares a los que se hicieron con f se concluye que: Si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to 0$, con lo cual afirmamos que g tiene una asíntota horizontal en y = 0. Asimismo si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to \infty$. La tabla muestra algunas imágenes de g.

x	$-3/2$	-1	1	$3/2$	2
$g(x)$	$\sqrt{27}$	3	$1/3$	$\sqrt{1/27}$	$1/9$

Tabla 3. Tabla de valores
Fuente: propia

Las gráficas de f y g se muestran en las figuras 8 y 9. Observe que las dos funciones son uno a uno. Esta es una característica de las funciones que tengan la forma x y = a. Además, note que f es una función creciente en su dominio, que es una particularidad de funciones de la forma x y = a con a > 1. Funciones como g es decir, de la forma x y = a con 0 < a < 1 son decrecientes en su dominio.

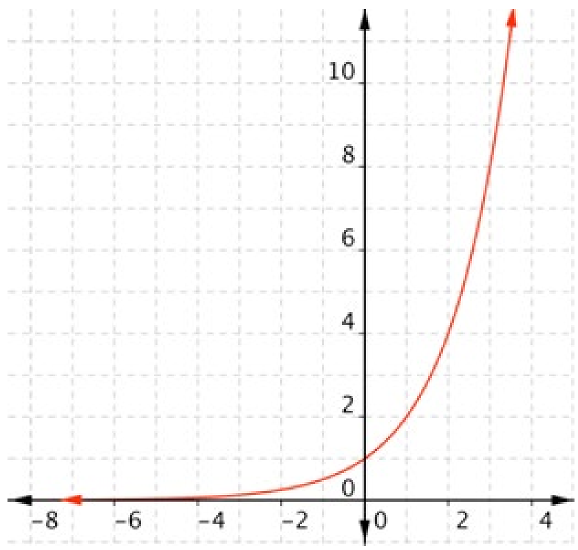

Figura 8. Gráfica de f(x)= 2x
Fuente: https://bit.ly/2LbXyX0

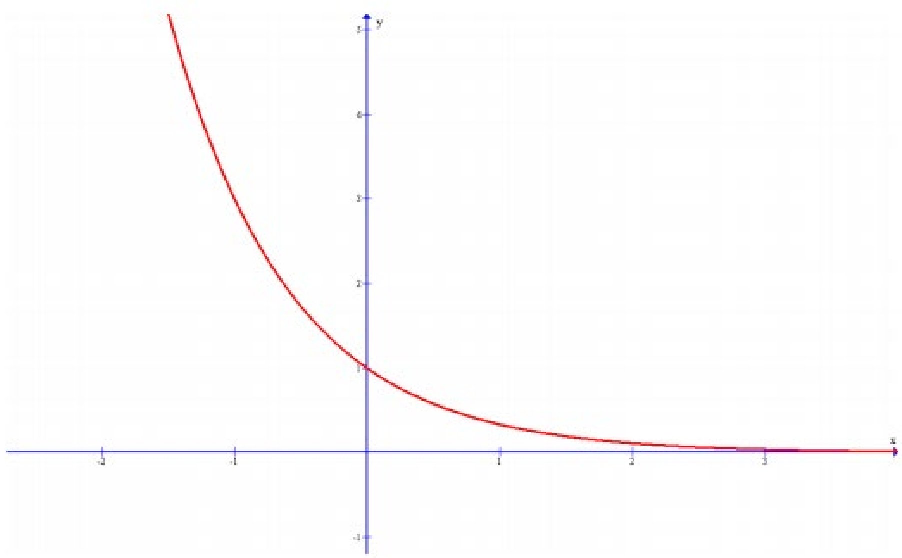

Figura 9. Gráfica de g(x)= $(1/3)^x$
Fuente: https://bit.ly/2LbXyX0

$\log_a x = y$ si y sólo sí $a^y = x$

Funciones logarítmicas

En el estudio de una función de la forma $f(x) = a^X$ se observó que es una función uno a uno. Así que f tiene inversa. Dicha función inversa se denomina la función logarítmica de base a y se define así:

$$\log_a x = y \text{ sí y solo sí } a^y = x$$

Figura 10. Representación de ecuación logarítmica
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

La expresión x a log se lee "logaritmo en base a de x". x se denomina argumento. De acuerdo con las características del modelo exponencial se tiene que a y x son reales positivos con $a \neq 1$.

Con base en la definición de logaritmo, la expresión $\log_{10} 100=2$ es equivalente con $10^2 =100$. Esto significa que se cuenta con un criterio para establecer la validez de una expresión logarítmica de igualdad, pues si la expresión exponencial correspondiente es verdadera, lo será la expresión logarítmica.

Nota: la expresión log10 x, se escribe usualmente como log x, por lo tanto, la igualdad log10 100=2, se registra como log100 = 2. De la misma manera, la expresión $10^{-2} =0.01$, es equivalente con log0,01 = –2. Un logaritmo de base 10 se denomina un logaritmo común.

La función inversa de la función exponencial de base e es la función logarítmica de base e, y de acuerdo con la definición de logaritmo se tiene que x = y equivale a e^y. =x Un logaritmo de base e se denomina un logaritmo natural. Así que $e^0 =1$ equivale a $\log_e 1=0$

Instrucción

A continuación, lo invitamos a realizar la actividad de emparejamiento, que le servirá para afianzar los conocimientos adquiridos hasta este punto. La encuentra disponible en la plataforma.

Funciones trigonométricas

Para entender con mayor facilidad el estudio de este tipo de función, se debe entender un ángulo como la unión de dos rayos que tienen vértice común, uno de los cuales se denomina lado inicial, y el otro (que resulta de rotar el lado inicial alrededor del vértice), se denomina lado final. Si la rotación se hace en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, se afirma que el ángulo está orientado positivamente o que es positivo, de lo contrario se asegura que el ángulo es negativo. Las figuras 11 y 12 ilustran esta definición.

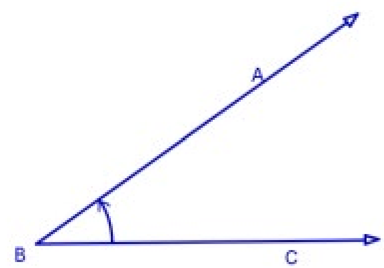

Figura 11. Ángulo positivo
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

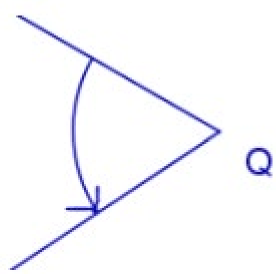

Figura 12. Ángulo negativo
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Un ángulo se nombra mediante tres letras, una de ellas en el lado inicial, otra en el vértice y la tercera en el lado final.

A cada ángulo orientado se asigna un número real denominado la medida del ángulo. Consideramos dos sistemas de medidas de ángulos, es decir, dos formas de asignar un número real a un ángulo. El primero de ellos se denomina sexagesimal y asume que un ángulo de un grado se obtiene cuando el lado inicial del ángulo se hace rotar 1/360 de un ángulo de una vuelta. O sea que el ángulo de una vuelta mide 360 grados. Se nota 360°.

El sistema radián considera que un ángulo central en una circunferencia de radio 1, el cual intercepta un arco de longitud 1, mide 1 radián (se abrevia 1 rad.). Como un ángulo de una vuelta intercepta un arco cuya longitud es la longitud de la circunferencia, entonces un ángulo de una vuelta mide 2π radianes. Las figuras 13 y 14 muestran un ángulo de un radián y ángulos de una vuelta (en los dos sistemas de medida).

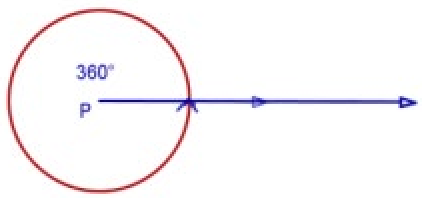

Figura 13. Ángulo de una vuelta
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

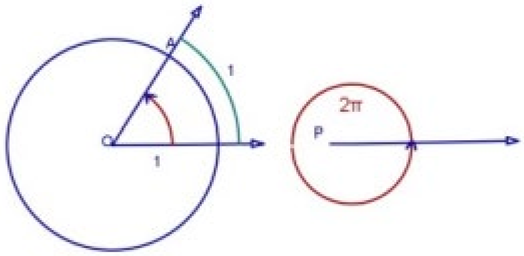

Figura 14. Ángulos en radianes
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Mediante las definiciones dadas de los sistemas de medidas, se establece una equivalencia de la medida de un ángulo en los dos sistemas. Por ejemplo, un ángulo que en el sistema sexagesimal mide 180°, en el sistema radián mide π radianes.

Un triángulo es la unión de los segmentos determinados por tres puntos no colineales. Los puntos se denominan vértices del triángulo y los segmentos se llaman los lados del triángulo. Un triángulo se nota mediante los tres vértices. En la figura 18 se representa ΔABC. En un triángulo es usual designar la medida de un lado, mediante una letra minúscula, que corresponde al vértice opuesto a dicho lado.

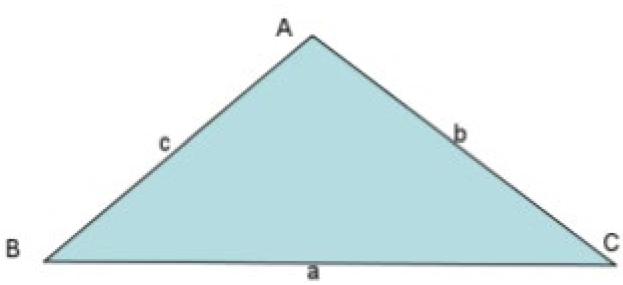

Figura 15. Triángulo
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Triángulo rectángulo

Un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto. Los lados que determinan el ángulo recto se denominan catetos y el lado que se opone al ángulo recto se llama hipotenusa. En la figura 16 la hipotenusa es OQ cuya medida es p. Si un cateto determina uno de los ángulos agudos del triángulo, se denomina el cateto adyacente al ángulo. Si el cateto no está sobre los lados del ángulo agudo en cuestión, se denomina cateto opuesto al ángulo. En la misma figura se aprecia que el cateto adyacente al ∧ O es el lado OP de medida q y el cateto opuesto a ∧ O es el lado PQ.

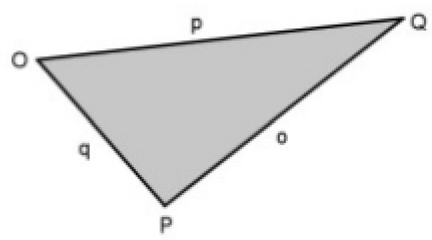

Figura 16. Triángulo rectángulo
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Razones trigonométricas

Una razón es el cociente entre dos cantidades. Una razón trigonométrica es el cociente entre las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo. Se asignan las razones trigonométricas a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por lo tanto, se nombran los catetos de acuerdo con el ángulo agudo al cual se refiere una razón trigonométrica. Es decir, se identifican los catetos opuesto y adyacente al ángulo para definir cada razón trigonométrica. Cada razón trigonométrica tiene un nombre y una abreviatura. A continuación, se definen las razones trigonométricas para el ángulo agudo ∧ A del triángulo rectángulo ΔABC de la figura 17 y se especifican sus abreviaturas. Se usan convenciones así: H para la hipotenusa, C.O. para el cateto opuesto al ángulo, y C.A. para el cateto adyacente al ángulo. Además, en adelante nos referimos al ángulo sin colocar su símbolo sobre la letra del vértice.

Ángulo
Que procede del vocablo latino angŭlus, hace referencia a una figura de la geometría que se forma a partir de dos rectas que se cortan entre sí en una misma superficie. También puede decirse que un ángulo está formado por dos semirrectas que comparten un mismo vértice.

Convenciones
Es un conjunto de estándares, reglas, normas o criterios que son de aceptación general para un determinado grupo social. Frecuentemente toman el nombre de criterios.

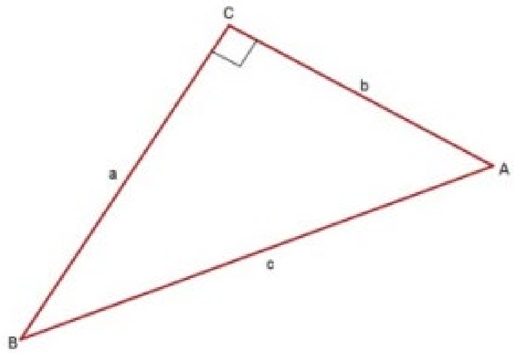

Figura 17. Razones trigonométricas
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Razón trigonométrica. Definición.	Razón trigonométrica. Abreviatura.
Seno $A = \frac{C.O.}{H}$	$\sin A = \frac{a}{c}$
Coseno $A = \frac{C.A.}{H}$	$\cos A = \frac{b}{c}$
Tangente $A = \frac{C.O.}{C.A.}$	$\tan A = \frac{a}{b}$
Cotangente $A = \frac{C.A.}{C.O.}$	$\cot A = \frac{b}{a}$
Secante $A = \frac{H.}{C.A.}$	$\sec A = \frac{c}{b}$
Cosecante $A = \frac{H.}{C.O.}$	$\csc A = \frac{c}{a}$

Tabla 4. Razones trigonométricas, definición y abreviatura
Fuente: Fundamentos de matemáticas, 2005

Lectura recomendada

De forma complementaria a este tema, lo invitamos a realizar la lectura:

Las cónicas y sus aplicaciones

Pedro Alegría

BIBLIOGRAFÍA

Bloom, P. (1994). *Generativity within language and other cognitive domains*. *Cognition, 51*(2), 177-189.

Rodríguez, J. (2005). *Fundamentos de matemática*. México, México: Universidad Nacional Autónoma de México.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr
San José, Costa Rica