DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

AUTOR: LUIS GUILLERMO CARO PINEDA

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el referente de pensamiento para el eje 4 estudiaremos las Transformadas de Laplace y las series de potencias como herramientas muy útiles en la solución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden.

En muchos escenarios de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, la función $R(x)$ es una función continua por tramos, por ejemplo, el voltaje aplicado a un circuito eléctrico; es dispendioso y difícil tratar de resolver situaciones como esta. Sin embargo, el estudio de la transformada de Laplace es una herramienta muy útil para resolverlas. Examinaremos la definición de la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace, las condiciones de existencia suficientes para el operador de la Laplace, L. Así mismo, exploraremos la propiedad de linealidad que permite resolver muchas transformadas de Laplace sin recurrir al cálculo de los límites al infinito.

Realizaremos también, un estudio detallado de las series de potencias y la definición de radio de convergencia muy útil para determinar si una serie converge o no converge (diverge). Para establecer la convergencia de una serie introducimos los conceptos de prueba de la razón y prueba de la raíz. En secciones anteriores hemos resuelto, principalmente, ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden y de orden superior, cuando en general, las ecuaciones tenían coeficientes constantes. Pero en las aplicaciones en Ciencias e Ingeniería se evidencia que las ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables tienen, en muchas ocasiones, mayor importancia. Nos centraremos en la solución en series de potencias de ecuaciones diferenciales de primer orden como $y'-x^2 y=0$, y ecuaciones diferenciales lineales sencillas de segundo orden con coeficientes variables como $y'-x^2 y=0$, que no tiene soluciones elementales.

De acuerdo con nuestros propósitos formativos, en el eje de pensamiento 4, Propongamos, formulamos la pregunta: **¿Qué estrategia utilizar para seleccionar métodos de solución de las ecuaciones diferenciales como las transformadas de Laplace y las soluciones en series de potencias?**

Transformadas de Laplace y soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales

Definición de la Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función de t definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$ denotada por $L[f(t)]$ se define como:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

En la definición de la transformada de Laplace, inicialmente supondremos que el parámetro s es real, aunque resulta más útil considerar a s como un parámetro complejo.

Se dice que la transformada de Laplace de $F(t)$ existe, cuando la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

converge para algún valor de s, de otra manera se dice que no converge.

En otras palabras, si podemos encontrar un valor para el límite

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

entonces decimos que la transformada de Laplace existe si y solo si, existe el límite anterior.

La nueva definición para la transformada de Laplace nos queda´

$$L[F(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Usted ya debió advertir dos dificultades a las que posiblemente se enfrentará al resolver transformadas de Laplace. De un lado, la presencia de límites en el infinito requiere de un manejo adecuado de las propiedades de las operaciones con límites en el infinito y las diversas formas en que éstos se presentarán en el transcurso de la presente cartilla. De otro lado, nuevamente se enfrenta a la solución de integrales por lo que debe repasar los métodos de integración vistos en cursos anteriores.

En los ejemplos que vienen, vamos a determinar la transformada de Laplace para dos funciones elementales con el propósito de lograr un manejo adecuado e introducirnos en algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace que facilitarán su cálculo para funciones un poco más complicadas. Estas funciones son la función de valor constante, $f(t) = c$, y la función idéntica, $f(t) = t$.

´ Recordemos que si f(t) está definida cuando t>0, la integral impropia 0Ws,tftdt–limb⟶∞0Ws,tftdt.

Ejemplo 1. Determine la transformada de Laplace para la función

$f(t) = c$, donde c es una constante.

$$L[c] = \int_0^{\infty} e^{-st} c\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} c\, dt = c\lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} c\, dt \Longrightarrow$$

$$L[c] = c\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^b = -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_0^b = -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{s(b)}} - \frac{1}{e^{s(0)}}\right] \Longrightarrow$$

$$L[c] = -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}[0-1] = -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}[-1] = -\frac{c}{s}(-1) = \frac{c}{s} \Longrightarrow$$

$$L[c] = \frac{c}{s} \qquad s > 0.$$

En términos generales, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y e^{-sb} tiende a cero cuando b tiende a infinito. Advierta que si $s < 0$, la integral $\lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} c\, dt$ es divergente.

El operador L es una transformación lineal

Sean $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ y $L[g(t)] = G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$.

Para una suma de funciones podemos escribir

$\int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)dt]dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$, siempre y cuando las dos integrales converjan; entonces

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Se afirma que el operador L es una transformación lineal gracias a la propiedad anterior.

Ejemplo 2. Determine la transformada de Laplace para la función

$f(t) = t$.

$$L[t] = \int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt \Longrightarrow$$

Esta última integral se resuelve por el método de partes.

Sea $u = t \implies du = dt$, $dv = e^{-st} \implies v = -\frac{e^{-st}}{s}$, entonces

$$\int e^{-st}tdt = t\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right] - \int -\frac{e^{-st}}{s}dt = -t\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\int e^{-st}dt \implies$$

$$\int e^{-st}tdt = -t\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right] = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \implies$$

$$\int e^{-st}tdt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}.$$

Volviendo a la transformada de Laplace para $f(t) = t$ nos queda

$$L[t] = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}t\,dt = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{te^{-st}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{ste^{-st} + e^{-st}}{s^2}\right]_0^b \implies$$

$$L[t] = -\frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}[e^{-st}(st+1)]_0^b = -\frac{1}{s^2}lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{st}}(st+1)\right]_0^b \implies$$

$$L[t] = -\frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{sb}}(sb+1) - \frac{1}{e^{s(0)}}(s(0)+1)\right] = \frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{sb+1}{e^{sb}}\right] \implies$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}\left[\lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right] = \frac{1}{s^2}\left[\lim_{b\to\infty}1 - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right] \implies$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}\left[1 - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right].$$

El último límite, $\lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]$, se puede resolver aplicando la regla de L'Hôpital, así:

$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{s}{se^{sb}}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{sb}}\right] = 0.$ Entonces,

$$L[t] = \frac{1}{s^2}[1-0] = \frac{1}{s^2} \implies$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Muchos ejercicios de transformadas de Laplace pueden requerir el uso de la regla de L'Hôpital, recordemos su definición:

Regla de L`Hôpital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo (a,b).

Sea $x_0 \in (a,b)$.

Si $f(x_0)=g(x_0)=0$ y existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Este resultado se aplica directamente a los casos

.

$$\frac{0}{0} \; e \; \frac{\infty}{\infty}$$

Teorema de existencia para el operador L.

Si $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo de números reales $[0,\infty)$ y de orden exponencial c para cualquier $t > T$, entonces $L[f(t)]$ existe para $s > c$.

Este teorema afirma que se requieren dos condiciones de suficiencia que garanticen la existencia de $L[f(t)]$:

- La función $f(t)$, debe ser continua por tramos en el intervalo de números reales $[0,\infty)$.
- La función $f(t)$ debe ser de orden exponencial.

La condición uno exige la continuidad de $f(t)$. Una función es continua por tramos en $[0,\infty)$, si en cualquier intervalo $0 \le a \le t \le b$, existen, a lo sumo, una cantidad finita de puntos, $t_k,\ k = 1,2,\cdots,n$ con $t_{k-1} < t_k$ en los cuales $f(t)$ tiene discontinuidades finitas y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.

Orden exponencial. Se dice que una función f es de orden exponencial c si existen constantes $M > 0$ y $T > 0$ tales que

$$|f(t)| \le Me^{ct} \text{ para todo } t > T.$$

Si f es una función creciente, la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > \mathrm{T}$ significa que la gráfica de f en el intervalo $[0, \infty)$ no crece con más rapidez que la gráfica de la función exponencial Me^{ct} donde la constante c es un valor positivo.

Por ejemplo, las funciones

$$f(t) = 2t, \qquad g(t) = e^{-t}, h(t) = 4sint$$

son de orden exponencial con $c = 1$, ya que

$$|t| \leq e^{-t}, \quad |e^{-t}| \leq e^{t}, \quad |4sint| \leq 4e^{t}.$$

La función e^{t} no es de orden exponencial porque su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de la función exponencial, e, en $0 < c < t$.

Una potencia t^{n}, con $n \in Z$, siempre es de orden exponencial con $c > 0$, porque

$$|t^{n}| \leq Me^{ct} \Longrightarrow \left|\frac{t^{n}}{e^{ct}}\right| \leq M \text{ cuando } t > T.$$

Es interesante que usted demuestre que aplicando de manera reiterada la regla de l'hôpital, el límite

$$lim_{t\to\infty} \left|\frac{t^{n}}{e^{ct}}\right| \text{ es una cantidad finita para valores de } n = 1,2,3, \cdots.$$

En el siguiente ejemplo deducimos una regla general que nos permitirá determinar transformadas de Laplace para funciones polinómicas de la forma t^{n}.

Esta deducción es importante porque le permite analizar una forma útil para generalizar el tratamiento con límites de la forma $lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}}\left(\frac{t^{k}}{s^{n-(k-1)}}\right)$.

Ejemplo 3. Determine $L[t^{n}]$.

$$L[t^{n}] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} t^{n}\, dt = lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-st} t^{n}\, dt \Longrightarrow$$

Aplicando de manera reiterada la integración por partes, tenemos

$$lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t^n\,dt$$

$$= lim_{b\to\infty}\Bigg[t^n\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)-nt^{n-1}\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)+(n)(n-1)t^{n-2}\left(\frac{e^{-st}}{-s^3}\right)$$
$$-(n)(n-1)(n-2)t^{n-3}\left(\frac{e^{-st}}{s^4}\right)+\cdots-(n)(n-1)\cdots(4)t^3\left(\frac{e^{-st}}{s^{n-2}}\right)$$
$$-(n-1)(n-2)\cdots(3)t^2\left(\frac{e^{-st}}{s^{n-1}}\right)-n!\,t^1\left(\frac{e^{-st}}{s^n}\right)-n!\,t^0(\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^{n+1}})\Bigg]_0^b \Rightarrow$$

$$L[t^n]=lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t^n\,dt$$

$$= lim_{b\to\infty}(\frac{1}{e^{st}})\Bigg[\left(\frac{t^n}{s}\right)+\left(\frac{nt^{n-1}}{s^2}\right)+\left(\frac{(n)(n-1)t^{n-2}}{-s^3}\right)$$
$$+\left(\frac{(n)(n-1)(n-2)t^{n-3}}{s^4}\right)+\cdots\left(\frac{(n)(n-1)\cdots(4)t^3}{s^{n-2}}\right)$$
$$+\left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(3)t^2}{s^{n-1}}\right)+\left(\frac{n!\,t^1}{s^n}\right)+(\frac{n!}{s^{n+1}})\Bigg]_0^b$$

Advierta que los límites de la forma $lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{st}}\left(\frac{t^k}{s^{n-(k-1)}}\right)$, con $k\neq 0$, son todos iguales a cero, por lo tanto, el único límite válido, es decir, diferente de cero, es

$$lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{st}}\right)\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]\Rightarrow$$

$$-\frac{n!}{s^{n+1}}\left|lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{st}}\right|_0^b\Rightarrow-\frac{n!}{s^{n+1}}\left[lim_{b\to\infty}(\frac{1}{e^{s(b)}}-\frac{1}{e^{s(0)}})\right]\Rightarrow$$

$$-\frac{n!}{s^{n+1}}[0-1]=\frac{n!}{s^{n+1}}\Rightarrow$$

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ejemplo 4. Determine $L[e^{at}]$.

$$L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}e^{at}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{at-st}dt \Longrightarrow$$

$$L[e^{at}] = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt.$$

Para resolver esta última integral, sea

$$u = (a-s)t \Longrightarrow du = (a-s)dt \Longrightarrow dt = \frac{du}{(a-s)} \Longrightarrow$$

$$L[e^{at}] = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt = \int \left[e^u\frac{du}{(a-s)}\right] = \frac{1}{a-s}e^u = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t} \Longrightarrow$$

Reemplazando nos queda

$$L[e^{at}] = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt = lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right|_0^b\right] = \frac{1}{a-s}lim_{b\to\infty}\left[\left|e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{a-s}lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{1}{e^{(s-a)t}}\right|_0^b\right] = \frac{1}{a-s}\left[lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{(s-a)b}} - \frac{1}{e^{(s-a)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{a-s}\left[lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{(s-a)b}} - 1\right)\right] = \frac{1}{a-s}[(0-1)] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \Longrightarrow$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

Ejemplo 5. Determine $L[cosat]$.

$$L[cosat] = \int_0^{\infty} e^{-st} cosat\ dt.$$

Considerando la fórmula de Euler,

$$e^{J\theta} = cos\theta + Jsin - \theta,$$

Como $e^{-J\theta} = e^{J(-\theta)} = cos(-\theta) + Jsin(-\theta)$, y considerando que la función seno es una función impar y la función coseno es una función par, aplicando estas propiedades nos queda que $e^{-J\theta} = e^{J(-\theta)} = cos(\theta) + Jsin(\theta)$, por consiguiente,

$$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = cos(\theta) + Jsin(\theta) + cos(\theta) - Jsin(\theta) \Longrightarrow$$

$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = 2cos(\theta) \Longrightarrow cos(\theta) = \frac{e^{J\theta}+e^{-J\theta}}{2}$, y trasladando a las variables de la integral, $cos(at) = \left(\frac{e^{Jat}+e^{-Jat}}{2}\right)$.

De manera similar,

$$e^{J\theta} - e^{-J\theta} = cos(\theta) + Jsin(\theta) - cos(\theta) + Jsin(\theta) \Longrightarrow$$

$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = 2Jsin(\theta) \Longrightarrow sin(\theta) = \frac{e^{J\theta}-e^{-J\theta}}{2J}$, y trasladando a las variables de la integral, $sin(at) = \left(\frac{e^{Jat}-e^{-Jat}}{2}\right)$.

Por lo tanto, aplicando las igualdades obtenidas, $\int_0^{\infty} e^{-st} cosat\ dt$ nos queda

$lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} cosat\ dt = lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} (\frac{e^{Jat}+e^{-Jat}}{2})\ dt =$
$lim_{b\to\infty} \int_0^b (\frac{e^{Jat-st}+e^{-Jat-st}}{2})\ dt \Longrightarrow$

$$lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} cosat\ dt = lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \int_0^b (e^{Jat-st})\ dt + lim_{b\to\infty} \int_0^b (e^{-Jat-st})\ dt\right]$$
$$\Longrightarrow$$

$$lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} cosat\ dt = lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(Ja-s)t}\ dt + lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(Ja-s)t}\ dt\right]$$
$$\Longrightarrow$$

$$L[cosat] = \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{(Ja-s)t}}{-(s+Ja)}\right|_0^b + lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(Ja-s)t}}{-(s-Ja)}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$L[cosat] = -\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{(Ja-s)t}}{(s+Ja)} + \frac{e^{-(Ja-s)t}}{(s-Ja)}\right|_0^b\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)e^{(Ja-s)t} + (s+Ja)e^{-(Ja-s)t}}{(s^2+a^2)} + \right|_0^b\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)t}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)t}}\right|_0^b\right] \Rightarrow$$

$$L[cosat] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right] lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)b}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}}\right) - \left(\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)0}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)0}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$L[cosat] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right][0-(s+Ja+s-Ja)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{-2s}{(s^2+a^2)}\right] \Rightarrow$$

$$L[cosat] = \frac{s}{(s^2+a^2)}.$$

El siguiente ejemplo ilustra la forma de encontrar la transformada de Laplace para la función $sinat$. Algunas etapas del procedimiento requieren repasar los pasos del ejemplo anterior.

Ejemplo 6. Determine $L[sinat]$.

$$L[sinat] = \int_0^\infty e^{-st} sinat\, dt.$$

Con información deducida en el ejemplo 4, escribimos la función seno en términos de las exponenciales e^{Jat} y e^{-Jat}:

$$sin(at) = \left(\frac{e^{Jat} - e^{-Jat}}{2}\right),$$ entonces,

$$L[sinat] = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} sinat\, dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\left(\frac{e^{Jat} - e^{-Jat}}{2J}\right)dt$$

$$= lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(\frac{e^{Jat-st} - e^{-Jat-st}}{2J}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2J}\left[lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(Ja-s)t}dt - lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(Ja+s)t}dt\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-Ja)t}dt - lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(Ja+s)t}dt\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-Ja)t}}{-(s-Ja)}\right|_0^b - lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+ja)t}}{-(s+Ja)}\right|_0^b\right] = \frac{1}{2J}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+ja)t}}{(s+Ja)} - \frac{e^{-(s-ja)t}}{(s-Ja)}\right|_0^b\right] =$$

$$= \frac{1}{2J}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)e^{-(s+Ja)\mathrm{t}}-(s+Ja)e^{-(s-Ja)t}}{(s^2+a^2)}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)t}}-\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)t}}\right|_0^b\right],$$

Reemplazando nos queda

$$L[sinat] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}}-\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)b}}\right)-\left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)0}}-\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$L[sinat] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}}-\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)\mathrm{b}}}\right)-(s-Ja-(s+Ja))\right] \Longrightarrow$$

$$L[sinat] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right][(0)-(s-Ja-s-Ja))] \Longrightarrow$$

$$L[sinat] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right](2Ja) = \frac{a}{(s^2+a^2)} \Longrightarrow$$

$$L[sinat] = \frac{a}{(s^2+a^2)}.$$

Ejemplo 7. Determine las transformadas de Laplace para las funciones seno y coseno hiperbólicos.

Primero vamos a calcular la transformada de Laplace para $f(t) = cosh(at)$.

$$L[cosh(at)] = \int_0^\infty e^{-st}cosh(at)\,dt.$$

Por definición de las funciones seno y coseno hiperbólicos sabemos que

$cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, y $sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Al reemplazar en la transformada nos queda

$$L[cosh(at)] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^{at-st}+e^{-at-st}}{2}\,dt \Longrightarrow$$

$$L[cosh(at)] = lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{e^{(a-s)t} + e^{-(a+s)t}}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt + lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(a+s)t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt + lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s+a)t} dt\right] \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] = \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt + lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(a+s)t} dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^b + lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^b\right] = -\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)} + \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^b\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty} \left|\frac{(s+a)e^{-(s-a)t} + (s-a)e^{-(s+a)t}}{(s^2-a^2)}\right|_0^b\right] \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\left[lim_{b\to\infty} \left|\frac{s+a}{e^{(s-a)t}} + \frac{s-a}{e^{(s+a)t}}\right|_0^b\right].$$

Reemplazando los límites de integración nos queda

$$L[cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)} lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}} + \frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right) - \left(\frac{s+a}{e^{(s-a)0}} + \frac{s-a}{e^{(s+a)0}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)} lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}} + \frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right) - (s+a+(s-a))\right] \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] == -\frac{1}{2(s^2-a^2)} lim_{b\to\infty}[(0) - (s+a+s-a))] \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2-a^2)}\right](-2s) = \frac{s}{(s^2-a^2)} \Rightarrow$$

$$L[cosh(at)] = \frac{s}{(s^2-a^2)}.$$

Con un procedimiento similar al anterior calculemos la transformada de Laplace para la función seno hiperbólico, con lo que daremos por sentado algunos pasos del proceso anterior.

$$L[sin(at)] = \int_0^\infty e^{-st} sin(at)\, dt.$$

Sabemos que $sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. Entonces,

$$L[sin(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{e^{at-st}-e^{-at-st}}{2}\,dt \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{e^{(a-s)t}-e^{-(a+s)t}}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{(a-s)t}dt - lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(a+s)t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(s-a)t}dt - lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(s+a)t}dt\right] \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = \frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{(a-s)t}dt - lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(a+s)t}dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^b - lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^b\right] = -\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)} - \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^b\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s+a)e^{-(s-a)t}-(s-a)e^{-(s+a)t}}{(s^2-a^2)}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\left[lim_{b\to\infty}\left|\frac{s+a}{e^{(s-a)\mathrm{t}}} - \frac{s-a}{e^{(s+a)t}}\right|_0^b\right].$$

Reemplazando los límites de integración nos queda

$$L[sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}} - \frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right) - \left(\frac{s+a}{e^{(s-a)0}} - \frac{s-a}{e^{(s+a)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}} - \frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right) - (s+a-(s-a))\right] \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] == -\frac{1}{2(s^2-a^2)}lim_{b\to\infty}[(0)-(s+a-s+a))] \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2-a^2)}\right](-2a) = \frac{a}{(s^2-a^2)} \Longrightarrow$$

$$L[sin(at)] = \frac{a}{(s^2-a^2)}.$$

Ejemplo 8.

Determine $L[te^{at}]$.

$L[te^{at}] = \int_0^\infty \; e^{-st}te^{at}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b \; te^{at-st}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^b \; te^{(a-s)t}\,dt$. Para resolver esta última integral usaremos el método de integración por partes.

Sea $\quad u = t \;\Rightarrow du$
$= dt, \;\; dv = e^{(a-s)t}dt \;\Rightarrow v = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}$, entonces

$$\int \; te^{(a-s)t}\,dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \int \; \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\int \; e^{(a-s)t}dt \Rightarrow$$

$$\int \; te^{(a-s)t}\,dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}.$$

Reemplazando tenemos,

$$L[te^{at}] = lim_{b\to\infty}\int_0^b \; te^{(a-s)t}\,dt = lim_{b\to\infty}\left[\left| t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right|_0^b\right]$$
$$= lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)te^{(a-s)t} - e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right|_0^b\right]$$
$$= \frac{1}{(a-s)^2}lim_{b\to\infty}\left[\left|(a-s)te^{-(s-a)t} - e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] \Rightarrow$$

$$L[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2}lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)t}{e^{(s-a)t}} - \frac{1}{e^{(a-s)t}}\right|_0^b\right]$$
$$= \frac{1}{(a-s)^2}lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(a-s)b}{e^{(s-a)b}} - \frac{1}{e^{(a-s)b}}\right) - \left(\frac{(a-s)0}{e^{(s-a)0}} - \frac{1}{e^{(a-s)0}}\right)\right] \Rightarrow$$
$$L[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2}[(0-0)-(-1)] = \frac{1}{(a-s)^2} \Rightarrow$$
$$L[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2} \qquad s > a.$$

Ejemplo 9. Determine $L[t^2e^{at}]$.

$$L[t^2e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st}t^2e^{at}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^{b} t^2e^{at-st}\,dt = lim_{b\to\infty}\int_0^{b} t^2e^{at-st}\,dt.$$

Para resolver esta última integral usaremos el método de integración por partes aplicado dos veces sucesivas.

Sea $u = t^2 \implies du = 2tdt,\ dv = e^{(a-s)t}dt \implies v = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}$, entonces

$\int te^{(a-s)t}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \int \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}2tdt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\int te^{(a-s)t}dt$. Esta última integral la resolvimos en el ejemplo anterior y nos quedó

$\int te^{(a-s)t}\,dt = \frac{te^{(a-s)t}}{(a-s)} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}$. Volviendo a la integral inicial nos queda

$$\int t^2e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\int te^{(a-s)t}dt \implies$$

$$\int t^2e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\left[\frac{te^{(a-s)t}}{(a-s)} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right] =$$

$$\int t^2e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2te^{(a-s)t}}{(a-s)^2} + \frac{2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3} \implies$$

$$L[t^2e^{at}] = lim_{b\to\infty}\int_0^{b} t^2e^{at-st}\,dt = lim_{b\to\infty}\left[\left|t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2te^{(a-s)t}}{(a-s)^2} + \frac{2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3}\right|_0^b\right] \implies$$

$$L[t^2e^{at}] = lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)^2t^2e^{(a-s)t} - 2(a-s)te^{(a-s)t} + 2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3} + \right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}lim_{b\to\infty}\left[\left|(a-s)^2t^2e^{-(s-a)t} - 2(a-s)te^{-(s-a)t} + 2e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)^2t^2}{e^{(s-a)t}} - \frac{2(a-s)t}{e^{(s-a)t}} + \frac{2}{e^{(s-a)t}}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(a-s)^2b^2}{e^{(s-a)b}} - \frac{2(a-s)b}{e^{(s-a)b}} + \frac{2}{e^{(s-a)b}}\right) - \left(\frac{(a-s)^2 0^2}{e^{(s-a)0}} - \frac{2(a-s)0}{e^{(s-a)0}} + \frac{2}{e^{(s-a)0}}\right)\right] \implies$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}[(0-0+0)-(0-0+2)] = -\frac{2}{(a-s)^3} = \frac{2}{(s-a)^3} \implies$$

$$L[t^2e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3} \qquad s > a.$$

Unas funciones muy especiales en matemáticas se relacionan con fenómenos que suceden teniendo en cuenta diferentes intervalos del dominio de definición, estas funciones se llaman funciones a trozos (o funciones por tramos). Para resolver transformadas de este tipo de funciones, generalmente por cada función se resuelve una integral cuidando los límites de integración.

Ejemplo 10. Transformada de una función por tramos.

Determine $L[f(t)]$, si

$$f(t) = \{0 \quad si \ \ 0 \leq t < 3 \ 2 \qquad si \ \ t \geq 3 \ \}$$

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{st} f(t)\, dt$$

Como $f(t)$ está definida por dos tramos, debemos expresar $L[f(t)]$ como la suma de dos integrales

$$L[f(t)] = lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{st} f(t)\, dt = lim_{b\to\infty} \left[\int_0^3 e^{st}(0)\, dt + \int_3^\infty e^{st}(2)\, dt\right] \Rightarrow$$

$$L[f(t)] = lim_{b\to\infty} \left[0 + 2\int_3^\infty e^{st} dt\right] = 2lim_{b\to\infty} \left[\left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_3^\infty\right] = -\frac{2}{s} lim_{b\to\infty} [|e^{-st}|_3^\infty] \Rightarrow$$

$$L[f(t)] = -\frac{2}{s} lim_{b\to\infty} \left[\left|\frac{1}{e^{st}}\right|_3^\infty\right] = -\frac{2}{s} lim_{b\to\infty} \left[\left(\frac{1}{e^{s\infty}}\right) - \left(\frac{1}{e^{s3}}\right)\right] = -\frac{2}{s}\left[(0) - \left(\frac{1}{e^{3s}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$L[f(t)] = \frac{2}{se^{3s}} \Rightarrow$$

$$L[f(t)] = L[f(t) = \{0 \quad si \ \ 0 \leq t < 3 \ 2 \qquad si \ \ t \geq 3 \ \}] = \frac{2}{se^{3s}}.$$

En el siguiente ejercicio resolvemos la transformada de Laplace para la función $f(t) = sin^2 t$. En la solución, ya no usaremos el cálculo de los límites, más bien usamos resultados anteriores. Muchos ejercicios se resuelven de esta manera.

Ejemplo 11. Propiedad de linealidad del operador L.

Determine $L[sin^2t]$.

Como $f(t) = sin^2t \Longrightarrow sin^2t = 1 - cos^2t = (sin^2t + cos^2t) - cos^2t \Longrightarrow$

$$sin^2t = -(cos^2t - sin^2t) + cos^2t = -cos2t + 1 - sin^2t \Longrightarrow$$

$$2sin^2t = 1 - cos2t \Longrightarrow sin^2t = \frac{1 - cos2t}{2} \Longrightarrow$$

$$L[sin^2t] = \int_0^\infty e^{-st} sin^2t\, dt = lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} sin^2t\, dt \ = lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \left[\frac{1 - cos2t}{2}\right] dt$$

$$L[sin^2t] = L\left[\frac{1}{2} - \frac{cos2t}{2}\right] = \frac{1}{2} L[1 - cos2t].$$

De los ejemplos 1 y 5 sabemos que

$L[c] = \frac{c}{s}$ y $L[cosat] = \frac{s}{(s^2+a^2)}$. Entonces,

$$\frac{1}{2} L[1 - cos2t] = \frac{1}{2}[L(1) - L(cos2t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2 + 2^2)}\right] \Longrightarrow$$

$$L[sin^2t] = \frac{1}{2}\left[\frac{s^2 + 4 - s^2}{s(s^2 + 2^2)}\right] = \frac{2}{s(s^2 + 2^2)} \Longrightarrow$$

$$L[sin^2t] = \frac{2}{s(s^2 + 2^2)}.$$

Es útil resumir en la tabla 1 algunos resultados importantes de las transformadas de Laplace en secciones anteriores, algunas deducidas y otras para que el estudiante las compruebe.

$f(t)$	$F(s)$
$f(t) = c$	$L[t] = F(s) = \frac{c}{s} \quad s > 0$
$f(t) = t$	$L[t] = F(s) = \frac{1}{s^2}$
$f(t) = t^n$	$L[t^n] = F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
$f(t) = e^{at}$	$L[e^{at}] = F(s) = \frac{1}{s-a}$
$f(t) = cosat$	$L[cosat] = F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)}$
$f(t) = sinat$	$L[sinat] = F(s) = \frac{a}{(s^2+a^2)}$
$f(t) = te^{at}$	$L[te^{at}] = F(s) = \frac{1}{(a-s)^2} \quad s > a.$
$f(t) = t^2e^{at}$	$L[t^2e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3} \quad s > a.$
$f(t) = sinhat$	$L[sinhat] = F(s) = \frac{a}{(s^2-a^2)}$
$f(t) = coshat$	$L[coshat] = F(s) = \frac{s}{(s^2-a^2)}$

Tabla 1. Transformadas de Laplace de algunas funciones básicas.

Transformada inversa de Laplace

En todos los ejemplos que revisamos en las secciones anteriores, nuestro propósito fue transformar una función $f(t)$ en otra función $F(s)$ utilizando la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Lo expresamos diciendo que

$$L[f(t)] = F(s).$$

Vamos ahora a devolvernos en el proceso, es decir, si se conoce la función $F(s)$, se trata de encontrar la función $f(t)$. Se trata de invertir el problema, es decir, dada $F(s)$, determinar $f(t)$ que corresponde a la transformación.

La nueva notación para la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = L^{-1}[F(s)],$$

que indica que $f(t)$ es la transformada inversa de $F(s)$.

A partir de la tabla 1, podemos escribir las transformadas inversas de las funciones que aparecen allí. En la tabla 2 aparecen algunas transformadas inversas de Laplace.

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$
$c = L^{-1}\left[\frac{c}{s}\right] \quad s > 0$
$t = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$
$t^n = L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]$
$e^{at} = L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]$
$cosat = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)}\right]$
$sinat = L^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right]$
$te^{at} = L^{-1}\left[\frac{1}{(a-s)^2}\right] \quad s > a.$
$t^2e^{at} = L^{-1}\left[\frac{2}{(s-a)^3}\right] \quad s > a.$
$sinhat = L^{-1}\left[\frac{a}{(s^2-a^2)}\right]$
$coshat = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-a^2)}\right]$

Tabla 2. Transformadas inversas de Laplace de algunas funciones básicas

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 163 a 176.

El operador L^{-1} es una transformación lineal.

Ya que el operador L es una transformación lineal, podemos suponer, que su operador inverso, L^{-1}, también debe ser una transformación lineal.

Si α y β son valores constantes,

$$L^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha L^{-1}[F(s)] + \beta L^{-1}[G(s)]$$

Donde F y G son las transformadas de las funciones f y g respectivamente.

Instrucción

Le invitamos a resolver la primera parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Ejemplo 12. Evalúe $L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$.

Al revisar la tabla 2, la expresión $t^n = L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]$, es la adecuada para evaluar esta transformada inversa.

Debemos ajustar la expresión $\frac{1}{s^4}$ a esta otra, $\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]$, para $n = 3$, así:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{3!} \cdot L^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3.$$

Ejemplo 13. Evalúe $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right]$.

Al revisar la tabla 2, la expresión $sinat = L^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right]$, es la adecuada para evaluar esta transformada inversa.

Debemos ajustar la expresión $\frac{1}{s^2+16}$ a esta otra, $\frac{a}{(s^2+a^2)}$, para $a = 4$, así:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right] = \frac{1}{4}\cdot L^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right] = \frac{1}{4}sin4t.$$

Ejemplo 14. Evalúe $L^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right]$.

$$L^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right] \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{5s}{s^2+9}+\frac{4}{s^2+9}\right].$$

Debemos aplicar la propiedad de linealidad para la transformada inversa de Laplace y las expresiones de la tabla 2:

$$sinat = L^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right], \qquad cosat = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)}\right]$$

Al hacerlo, nos queda

$$L^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right] = 5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \frac{4}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] = 5cos3t + \frac{4}{3}cos3t.$$

Fracciones parciales para el operador L^{-1}.

En sus cursos de Cálculo usted ha estudiado el método de descomposición en fracciones parciales para expresiones que contienen por ejemplo, factores lineales distintos, factores lineales repetidos y expresiones cuadráticas con o sin factores reales, por ejemplo:

$$\frac{1}{(s-3)(s+2)(s-1)}, \quad \frac{s-1}{s^2(s-2)^3}, \quad \frac{5s-1}{s^3(s+4)^2}.$$

En el ejemplo que sigue repasaremos uno de estos casos para resaltar su importancia al evaluar transformadas inversas de Laplace.

Ejemplo 14.

Evalúe $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right]$.

La descomposición en fracciones parciales para la expresión $\frac{1}{(s-3)(s+2)(s-1)}$, incluye las tres constantes A, B y C, tales que

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s-5)} + \frac{C}{(s-2)}.$$

Al comparar los coeficientes de las potencias en ambos lados de la igualdad y efectuar operaciones algebraicas nos resulta un sistema de tres ecuaciones con tres variables A, B y C.

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{A(s-5)(s-2)}{(s+3)} + \frac{B(s+3)(s-2)}{(s-5)} + \frac{C(s+3)(s-5)}{(s-2)} =$$

$$As^2 - 7sA + 10A + Bs^2 + sB - 6B + Cs^2 - 2sC - 15c =$$

$$(A+B+C)s^2 + (-7A+B-2C)s + (10A-6B-15C).$$

Los coeficientes correspondientes para s^2, s y el término independientes son respectivamente $0, 0$ y 1. Entonces nos queda el sistema 3x3:

$\{A+B+C=0 \ -7A+B-2C=0 \ 10A-6B-15C=1\}$.

Al resolverlo obtenemos $A=\frac{1}{40}$, $B=\frac{1}{24}$, $C=-\frac{1}{15}$. Entonces las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{\frac{1}{40}}{(s+3)} + \frac{\frac{1}{24}}{(s-5)} - \frac{\frac{1}{15}}{(s-2)} \Longrightarrow$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right] = \frac{1}{40}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right] + \frac{1}{24}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)}\right] - \frac{1}{15}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right] = \frac{1}{40}e^{-3t} + \frac{1}{24}e^{5t} - \frac{1}{15}e^{2t}.$$

Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales

Series de potencias.

Una serie de potencias en $x-a$ es una serie de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$ (1).

La serie (1) se denomina serie de Taylor o desarrollo de potencias en un entorno de $x=a$. Aunque en algunos casos x sea igual a a, es decir, $x=a$, por conveniencia tomamos siempre que $(x-a)^0 = 1$.

Si en la serie de Taylor, $a=0$, la nueva serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (2).$$

se denomina serie de Maclaurin o desarrollo en series de potencias alrededor del origen.

Radio de convergencia:

Para cada serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k,$$

hay un número $R \geq 0$, que puede ser infinito, tal que:

1. Si $|x-a| < R$, entonces la serie converge.

2. Si $|x-a| > R$, entonces la serie diverge (no converge).

Este número R se llama radio de convergencia de la serie de potencias.

Para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

podemos emplear dos formas de hacerlo: la prueba de la razón y la prueba de la raíz.

Prueba de la razón.

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = L$$

Prueba de la raíz.

$$lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} = L$$

Luego determinamos R del modo siguiente:

1. Si $L = \infty$, entonces $R = 0$. La serie converge únicamente para $x = a$.
2. Si $L = 0$, entonces $R = \infty$. La serie converge para todo x.
3. Si se obtiene otro resultado entonces $R = \frac{1}{L}$.

Ejemplo 15. Hallar el radio de la convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k}{3^k}\right)x^k.$$

Aplicamos la prueba de la razón de la siguiente manera:

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{\frac{2(k+1)}{3^{k+1}}}{\frac{2k}{3^k}}\right)\right| = lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{2k}\left(\frac{3^k}{3^{(k+1)}}\right)\right]$$
$$= lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{2k}\left(3^{k-(k+1)}\right)\right] = lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{3(2k)}\right] = \frac{1}{3}lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k+2)}{(2k)}\right]$$
$$= \frac{1}{3}lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k}{2k}+\frac{2}{2k}\right] = \frac{1}{3}lim_{k\to\infty}[1] + \frac{1}{3}lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\right] = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \frac{1}{3}.$$

Como $L = \frac{1}{3}$, entonces $R = \frac{1}{L} \Longrightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{3}} \Longrightarrow R = 3.$

Intervalo de convergencia de la serie de potencias.

El conjunto de todos los valores de x para los cuales una serie de potencias dada es convergente se llama intervalo de convergencia de la serie de potencias.

Ejemplo 16. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right).$$

Primero determinamos el grado de convergencia aplicando la prueba de la razón de la siguiente manera:

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}}{\frac{1}{k2^k}}\right)\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}}\right)\right|$$

$$= lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{(k+1)}\left(\frac{2^k}{2^{(k+1)}}\right)\right| = lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{(k+1)}\left(2^{k-(k+1)}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{(k+1)}\right] = \frac{1}{2}lim_{k\to\infty}\left[\frac{\frac{k}{k}}{\frac{(k+1)}{k}}\right] = \frac{1}{2}lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{lim_{k\to\infty}1}{lim_{k\to\infty}1+lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \frac{1}{2}.$$

Como $L=\frac{1}{2}$, entonces $R=\frac{1}{L} \Longrightarrow R=\frac{1}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow R=2.$

Por lo tanto, la serie converge para $|x|<2$ y diverge para $|x|>2$. Analicemos lo que ocurre cuando $|x|=2$:

Para $|x|=2$ tenemos $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$,

Esta serie se llama la serie armónica y por lo tanto diverge.

Para $|x|=-2$ tenemos $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{k}$,

Esta serie se llama la serie alternada cuyos términos tienden a cero de modo que la serie converge por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es $[-2,2)$.

Ejemplo 17. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(lnk)^k}.$$

Para hallar el radio de convergencia empleamos la prueba de la raíz:

$$lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} = lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(lnk)^k}\right|^{\frac{1}{k}} = lim_{k\to\infty}\frac{1^{\frac{1}{k}}}{[(lnk)^k]^{\frac{1}{k}}} = lim_{k\to\infty}\frac{1}{lnk} = 0.$$

Como $L = 0$ entonces $R = \infty$ por lo tanto el intervalo de convergencia para esta serie es $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 18. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2}.$$

Hallamos el radio de convergencia mediante la prueba de la razón así:

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}\right)\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k^2}{(k+1)^2}\right)\right| = lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right|$$

$$= \left[lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{(k+1)}\right]\right]^2 = 1^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = 1.$$

Como $L = 1$, entonces $R = \frac{1}{L} \Longrightarrow R = 1$.

Por lo tanto, la serie converge para $|x-3| < 1$, es decir, si

$$-1 < x - 3 < 1 \Longrightarrow 2 < x < 4.$$

Y diverge para $|x-3| > 1$.

Analicemos lo que ocurre cuando $|x| = 2$:

Para $x = 2$ tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-3)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} =$.

Esta serie es alterna y absolutamente convergente.

Para $x = 4$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4-3)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Esta serie es convergente, por lo tanto 2 y 4 son parte del intervalo de convergencia, entonces el intervalo de convergencia es $[2,4]$.

En general la prueba de la razón es muy útil cuando hay factoriales mientras que la prueba de la raíz es más útil cuando hay potencias.

Teorema de convergencia. Si la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

es una serie de potencias con un radio de convergencia $R > 0$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

también tiene a R como su radio de convergencia.

Teorema de diferenciación de series de potencias. Sea la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$ entonces si f es la función definida por

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Se garantiza la existencia de la derivada de la función f, denotada por f', para cualquier valor de x en el intervalo abierto $(-R, R)$. Esta derivada está dada por

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-1}.$$

Teorema integración de series de potencias. Sea la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$ entonces si f es la función definida por

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

f es integrable en cualquier subintervalo cerrado de $(-R, R)$ y

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Además, R es radio de convergencia de la serie resultante.

Solución de ED de primer orden usando series de potencias.

En las unidades anteriores hemos estudiado diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. Por ejemplo, al evaluar la ecuación diferencial de primer orden

$$y' - x^2 y = 0 \qquad (1),$$

recordemos que se puede resolver por el método de variables separables estudiado en la unidad II.

La pregunta que surge en este momento es ¿es posible utilizar una serie de potencias para resolver (1)? ¿Cómo hacerlo?

Efectivamente, podemos encontrar para (1), una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad (2).$$

En otras palabras, la tarea consiste en determinar los coeficientes C_n de esta serie que resuelvan (1).

Empecemos por encontrar la derivada de (2) para luego sustituirla en (1). Sabemos que los primeros términos de la serie (2) son

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

Si queremos derivar esta serie, es decir, calcular y', entonces derivamos cada uno de los términos de (2) de la siguiente manera:

$$y' = 0 + C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots$$

Esta derivada se puede escribir como una serie de potencias, empezando en $n = 1$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots$$

Advierta que al derivar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, aplicamos la regla de derivación de la potencia de manera directa a la serie, pero cuidando que en la derivada partimos desde $n = 1$ y no desde $n = 0$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \qquad (3).$$

Así mismo, si quisiéramos determinar la segunda derivada, y'', aplicamos nuevamente la regla de derivación de la potencia de manera directa a la serie (3) pero cuidando que en la derivada partimos desde $n = 2$ y no desde $n = 1$.

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2},$$

Y de manera reiterada para las derivadas sucesivas.

Volvamos a (1). Ahora debemos sustituir los términos de y y y' en (1).

$$y' - x^2 y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \Longrightarrow$$

$$y' - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0.$$

El propósito ahora es poder expresar esas dos sumatorias en términos de una sola sumatoria. Para hacerlo, utilizamos un procedimiento que se llama "enfasar", que consiste en que todas las x comiencen en la misma potencia y que las sumatorias inicien en los mismos índices.

Advierta que en la sumatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1},$$

al sustituir n por el valor inicial $n = 1$, la potencia de x^{n-1} inicia en $x^{n-1} = x^{1-1} = x^0$, mientras que en la sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} \qquad (4),$$

al sustituir n por el valor inicial $n = 0$, la potencia de x^{n+2} inicia en $x^{n+2} = x^{0+2} = x^2$, es decir, las x inician en diferentes potencias. Adicionalmente la sumatoria en (3) inicia desde $n = 1$, mientras que la sumatoria en (4) inicia desde $n = 0$. El propósito es que las dos sumatorias inicien desde el mismo valor.

El primer paso consiste en equilibrar las potencias de x. La idea es comenzar con la sumatoria que contenga la menor potencia de x, en este caso la sumatoria (3). Calculemos los tres primeros términos de esta serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = (1)C_1 x^{1-1} + (2)C_2 x^{2-1} + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1}.$$

Volviendo a la ecuación diferencial inicial obtenemos

$$y' - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}.$$

Ya superamos el problema inicial, es decir, ya logramos que las dos series comiencen con la misma potencia de x, es decir, x^2.

Ahora debemos nivelar los coeficientes. Para hacerlo, voy a incluir un nuevo coeficiente k, que me va a sustituir las potencias de x en cada una de las dos sumatorias.

Para la primera sumatoria

$$\sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1},$$

$k = n - 1$, que es la potencia de x.

Para la segunda sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}$$

$k = n + 2$, que es la potencia de x.

Ya sospechará usted, que el propósito es escribir los nuevos coeficientes en términos de k, para lo cual, debemos despejar k para cada caso:

$n = k + 1$ y $n = k - 2$. Cuando $n = 3 \Longrightarrow k = 2$, lo que indica que ya superamos el segundo inconveniente, es decir, las dos sumatorias comienzan desde $k = 2$, con lo que la expresión

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2},$$

Se transforma en

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)C_{k+1} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} x^k.$$

De esta manera, (5) está completamente enfasada, ya que las x comienzan desde la misma potencia, x^2, y ambas inician desde el mismo número, $k = 2$.

Y ya podemos integrar las dos sumatorias en una sola; entonces (5) se transforma en

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)C_{k+1} x^k - C_{k-2} x^k,$$

factorizando x^k nos queda

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)C_{k+1} - C_{k-2}]x^k \qquad (6).$$

Hemos llegado a una ecuación que depende de los coeficientes C_1, C_2, C_{k+1}, C_{k-2}, que son precisamente los coeficientes que se deben determinar.

Es decir, cuando queremos resolver una ecuación diferencial mediante series de potencias, las operaciones algebraicas se realizan con el objetivo de determinar estos coeficientes.

Para la ecuación diferencial que nos convoca, $y' - x^2y = 0$, todos los términos de la serie van a tener que depender de un solo coeficiente porque la ecuación diferencial es de primer orden[2]. Para este caso, y para todos los problemas con series, debemos generar una fórmula de recurrencia para poder encontrar todos los C_k, que a su vez son los C_n que habíamos asumido en la serie inicial (2).

Como la expresión (6) debe ser igual a cero, por la condición de $y' - x^2y = 0$, entonces

$$C_1 + 2C_2x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)C_{k+1} - C_{k-2}]x^k = 0,$$

obliga a que los coeficientes sean todos iguales a cero, es decir,

$$C_1 = C_2 = 0, \quad (k+1)C_{k+1} - C_{k-2} = 0, \text{ con lo que}$$

$$C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)},$$

expresión que permitirá encontrar todos los coeficientes C_n a partir de uno solo. Sabemos que k comienza desde $k = 2$, entonces busquemos algunos de ellos.

$$\text{Para } k = 2 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_{2+1} = \frac{C_{2-2}}{(2+1)} \Longrightarrow C_3 = \frac{C_0}{3}.$$

$$\text{Para } k = 3 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_{3+1} = \frac{C_{3-2}}{(3+1)} \Longrightarrow C_4 = \frac{C_1}{4}, \text{ como } C_1 = 0 \Longrightarrow C_4 = 0.$$

$$\text{Para } k = 4 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_5 = \frac{C_2}{5}, \text{ como } C_2 = 0 \Longrightarrow C_5 = 0.$$

$$\text{Para } k = 5 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_6 = \frac{C_3}{6}, \text{ como } C_3 = \frac{C_0}{3} \Longrightarrow C_6 = \frac{C_0}{3*6} = \frac{C_0}{2*3^2}.$$

$$\text{Para } k = 6 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_7 = \frac{C_4}{7} \Longrightarrow, \text{ como } C_4 = 0 \Longrightarrow C_7 = 0.$$

$$\text{Para } k = 7 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_8 = \frac{C_5}{8} \Longrightarrow, \text{ como } C_5 = 0 \Longrightarrow C_8 = 0.$$

$$\text{Para } k = 8 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_9 = \frac{C_6}{9}, \text{ como } C_6 = \frac{C_0}{18} \Longrightarrow C_9 = \frac{C_0}{2*3*3^3}.$$

Si analizamos la secuencia de los coeficientes, vemos que

$$C_4 = C_5 = C_7 = C_8 = 0.$$

Esta cadena de resultados nos indica varias cosas. Cada dos coeficientes seguidos son cero, con lo que

$$C_{10} = C_{11} = C_{13} = C_{14} = \cdots 0.$$

[2] Recuerden que una ecuación diferencial de primer orden tiene una solución de la forma y=ky1.

Además, los coeficientes $C_6, C_9, C_{12}, C_{15}, \cdots$, que son múltiplos de 3, pueden encontrarse a partir de

$$C_3 = \frac{C_0}{3}. C_6 = \frac{C_0}{2 * 3^2}.$$

$$C_9 = \frac{C_0}{2 * 3 * 3^3}.$$

$$C_{12} = \frac{C_0}{2 * 3 * 4 * 3^4}.$$

Estas expresiones nos están dando cierta ley para los coeficientes múltiplos de 3 solamente, ya que los demás son cero, y sugiere el uso del factorial

$$C_n = \frac{C_0}{n!\, 3^n} \qquad n = 3, 6, 9, 12, \cdots$$

La pregunta siguiente es cómo escribir este hecho mediante una sumatoria. Habíamos dicho que la solución que buscamos es una serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 \mathrm{x}^7 + C_8 x^8 + C_9 x^9 + C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} + C_{12} x^{12} + \cdots \quad (7).$$

Pero los términos

$$C_1 x = C_2 x^2 = C_4 x^4 = C_5 x^5 = C_7 x^7 = C_8 x^8 = C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} = 0.$$

Entonces la expresión (7) se transforma en

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_3 x^3 + C_6 x^6 + C_9 x^9 + C_{12} x^{12} + \cdots \Longrightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \frac{C_0}{3} x^3 + \frac{C_0}{2 * 3^2} x^6 + \frac{C_0}{2 * 3 * 3^3} x^9 + \frac{C_0}{2 * 3 * 4 * 3^4} x^{12} + \cdots \Longrightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \frac{C_0}{3} x^3 + \frac{C_0}{2! * 3^2} x^6 + \frac{C_0}{3! * 3^3} x^9 + \frac{C_0}{4! * 3^4} x^{12} + \cdots \Longrightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{n! * 3^n} x^{3n} \qquad (8).$$

Hemos encontrado la solución de la ecuación diferencial $y' - x^2y = 0$ usando series de potencias y el resultado es (8). Sin embargo, al resolver esta ecuación por un método convencional como la separación de variables encontramos un resultado aparentemente diferente. Resolvamos $y' - x^2y = 0$ por separación de variables.

$$y' - x^2y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} - x^2y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = x^2dx \Longrightarrow lny = \frac{x^3}{3} + c \Longrightarrow$$

$$e^{lny} = e^{\frac{x^3}{3}+c} \Longrightarrow$$

$$y = c_0e^{\frac{x^3}{3}} \qquad (9).$$

Este resultado, en apariencia diferente al encontrado en (8), realmente es igual. Para verificarlo, debemos recordar que la función exponencial es una función que se puede representar como una serie de potencias de la siguiente manera

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Longrightarrow e^{\frac{x^3}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^n}{n!}.$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales

García, A. y Reich, D.

Páginas 124 a 134.

Solución de ED de segundo orden usando series de potencias.

Nos enfocamos ahora en la solución de una ED de segundo orden usando series de potencias, por ejemplo, vamos a resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + xy = 0 \qquad (10),$$

y comenzamos como en la sección anterior a partir de la serie (2)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n \Longrightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_nx^{n-1} \Longrightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2}.$$

Al sustituir $y´´$ y y en 10 obtenemos:

$$y´´ + xy = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1},$$

Como la primera sumatoria empieza en cero porque x^{n-2} se hace cero cuando $n = 2$, y la segunda en 1 porque x^{n+1} se hace uno cuando $n = 0$, entonces debemos equilibrar las series para dejar solamente una, recordando que para hacerlo, utilizamos el procedimiento que se llama "enfasar", que consiste en que todas las x comiencen en la misma potencia y que las sumatorias inicien en los mismos índices.

Como la diferencia entre las potencias de x en ambas sumatorias es de uno, solamente debemos sacar el primer término de la primera sumatoria, así:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0.$$

Ya superamos el problema inicial, es decir, ya logramos que las dos series comiencen con la misma potencia de x, es decir, x^1.

Ahora debemos nivelar los coeficientes. Para hacerlo, incluimos un nuevo coeficiente k, que me va a sustituir las potencias de x en cada una de las dos sumatorias.

Para la primera sumatoria

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

$k = n - 2$, que es la potencia de x, y $n = k + 2$.

Para la segunda sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

$k = n + 1$, que es la potencia de x, y $n = k - 1$.

Haciendo las sustituciones encontradas, obtenemos

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k = 0 \qquad (11).$$

De esta manera, (11) está completamente enfasada, ya que las x comienzan desde la misma potencia, x^1, y ambas inician desde el mismo número, $k=1$. Y ya podemos integrar las dos sumatorias en una sola; entonces (11) se transforma en

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + C_{k-1}x^k = 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}]x^k = 0.$$

Instrucción

Le invitamos a resolver la segunda parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Hemos llegado a una ecuación que depende de los coeficientes C_2, C_{k+2}, C_{k-1}, que son precisamente los coeficientes que se deben determinar.

Para la ecuación diferencial que nos convoca, $y'' + xy = 0$, todos los términos de la serie van a tener que depender de dos coeficientes porque la ecuación diferencial es de segundo orden[5]. Generemos la fórmula de recurrencia para poder encontrar todos los C_k, que a su vez son los C_n que habíamos asumido en la serie inicial.

Como la última expresión debe ser igual a cero, por la condición de $y'' + xy = 0$, entonces

$$2C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0,$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1} = 0 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)}.$$

Como la sumatoria empieza en $k=1$, ahí comenzamos

Para $k=1 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \Longrightarrow C_{2+1} = -\frac{C_{1-1}}{(1+2)(1+1)} \Longrightarrow C_3 = -\frac{C_0}{2*3}.$

Para $k=2 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \Longrightarrow C_{2+2} = -\frac{C_{2-1}}{(2+2)(2+1)} \Longrightarrow C_4 = -\frac{C_1}{3*4}.$

[5] Recuerden que una ecuación diferencial de segundo orden tiene una solución de la forma y=c1y1+c2y2.

Para $k=3 \Longrightarrow C_{3+2}=-\frac{C_{3-1}}{(3+2)(3+1)} \Longrightarrow C_5=-\frac{C_2}{4*5}$, como $C_2=0 \Longrightarrow C_5=0.$

Para $k=4 \Longrightarrow C_{4+2}=-\frac{C_{4-1}}{(4+2)(4+1)} \Longrightarrow C_6=-\frac{C_3}{5*6}$, como $C_3=-\frac{C_0}{2*3} \Longrightarrow C_6=\frac{C_0}{2*3*5*6}$.

Para $k=5 \Longrightarrow C_{5+2}=-\frac{C_{5-1}}{(5+2)(5+1)} \Longrightarrow C_7=-\frac{C_4}{6*7}$, como $C_4=-\frac{C_1}{3*4} \Longrightarrow C_7=\frac{C_1}{3*4*6*7}$.

Para $k=6 \Longrightarrow C_{6+2}=-\frac{C_{6-1}}{(6+2)(6+1)} \Longrightarrow C_8=-\frac{C_5}{7*8}$, como $C_5=0 \Longrightarrow C_8=0.$

Para $k=7 \Longrightarrow C_9=-\frac{C_6}{8*9}$, como $C_6=-\frac{C_0}{2*3*5*6} \Longrightarrow C_9=-\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9}$.

Ya sospechamos la ley que queremos encontrar. Los coeficientes múltiplos de 3 van depender de C_0 con signos positivos y negativos alternados. Los coeficientes C_4, C_7, C_{10}, C_{13}, van a depender de C_1 con signos positivos y negativos alternados.

Y de manera similar, analizar como aparecen dispuestos los números en los denominadores.

Resumiendo los resultados obtenidos hasta C_9,

$$C_2=0, \qquad C_3=-\frac{C_0}{2*3}, \qquad C_4=-\frac{C_1}{3*4}, \; C_5=0, \qquad C_6=\frac{C_0}{2*3*5*6},$$
$$C_7=\frac{C_1}{3*4*6*7}, \qquad C_8=0, \;\; C_9=-\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9}.$$

Habíamos dicho que la solución que buscamos es una serie de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+C_6x^6+C_7x^7+C_8x^8+C_9x^9$$
$$+C_{10}x^{10}+C_{11}x^{11}+C_{12}x^{12}+\cdots \qquad (7).$$

Pero los términos $C_2x^2=C_5x^5=C_8x^8=C_{11}x^{11}=\cdots 0$. Y sustituyendo los coeficientes que dependen de C_0 y C_1.

Entonces la expresión (7) se transforma en

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n=C_0+C_1x+(-\frac{C_0}{2*3})x^3+(-\frac{C_1}{3*4})x^4+(\frac{C_0}{2*3*5*6})x^6+(\frac{C_1}{3*4*6*7})x^7$$
$$+(-\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9})x^9+(-\frac{C_0}{3*4*6*7*9*10})x^{10}\cdots$$

Entonces las dos soluciones que requiere la ecuación diferencial de segundo orden $y' - x^2y = 0,$ que deben ser de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$, nos indica que una de ellas estará conformada por los coeficientes que contengan C_1 y la otra por los coeficientes que contengan C_2. Entonces agrupemos estas dos posibles soluciones:

$$y = C_0\left[1 - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^6}{2*3*5*6} - \frac{x^9}{2*3*5*6*8*9} + \cdots\right] +$$

$$C_1\left[x - \frac{x^4}{3*4} + \frac{x^7}{3*4*6*7} - \frac{x^{10}}{3*4*6*7*9*10} + \cdots\right].$$

Esta última expresión ya es la solución requerida de $y' - x^2y = 0.$ Sin embargo, podemos tratar de escribirla de otra manera, es decir, tratar de generalizar el resultado.

Al generalizar el primer término de la última expresión nos queda

$$C_0\left[1 - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^6}{2*3*5*6} - \frac{x^9}{2*3*5*6*8*9} + \cdots\right] = C_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-2}{(3k)!} x^{3k}\right].$$

Haciendo lo propio para el segundo término de la última expresión nos queda

$$C_1\left[x - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^6}{2*3*5*6} - \frac{x^9}{2*3*5*6*8*9} + \cdots\right]$$
$$= C_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-1}{(3k+1)!} x^{3k-1}\right].$$

Entonces la solución requerida nos queda

$$y = C_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-2}{(3k)!} x^{3k}\right] + C_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-1}{(3k+1)!} x^{3k-1}\right].$$

Instrucción

Para finalizar, revise un resumen de los contenidos del referente de pensamiento del eje 4, observe el videoresumen.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, D., Álvarez, L., y Calzada, D. (2010). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos.*

Bargueño, F., y Alonso, D. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales: con introducciones teóricas.*

Blanes, Z., Ginestar, P., y Roselló, F. (2014). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.* Segunda. edición

Bobadilla, A., y Labarca, B. (2014). *Cálculo en una variable.*

Caicedo, A., y García, J. (2010). *Métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Camacho, A. (2010). *Cálculo diferencial.*

Castro, F. (2010). *Estabilidad: de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones funcionales: con sus aplicaciones.*

García, H. (2014). *Ecuaciones diferenciales.*

________. (2014). *Cálculo de varias variables.*

García, H., y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión.*

Guerrero, T. (2014). *Cálculo diferencial: serie universitaria patria.*

Index Mundi. (2017). *Colombia Tasa de crecimiento.*

López, M., y Acero, I. (2009). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas.* Segunda. Edición

Mesa, F. (2012). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción.*

Mombo, K. (2015). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias: una estrategia didáctica con integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el instituto superior de ciencias de la educación de Cabinda.*

Ortiz, C. (2014). *Cálculo diferencial.*

Ortiz, C., Ortiz, J., y Ortiz, F. (2015). *Cálculo diferencial.* Segunda. edición

Pagola, M., y López, G. (2017). *Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva.* Segunda. edición

BIBLIOGRAFÍA

Rivera, F. (2014). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias.*

Reyes, G. (2012). *Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas.*

Simmons, G. (2007). *Ecuaciones diferenciales*. Teoría, técnica y práctica. McGraw Hill.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr

San José, Costa Rica