FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN SUPERIOR

AUTOR: LUIS GUILLERMO CARO PINEDA

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el referente de pensamiento para el eje 3, iniciamos el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior, enfocando nuestra atención en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Como antesala al estudio de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, revisaremos cuatro teoremas. El primero nos garantiza la existencia de una solución para una ecuación diferencial bajo ciertas condiciones, y afirma que dicha solución es única; el teorema dos determina la solución general de una ecuación que relaciona la ecuación completa y su ecuación reducida; el teorema tres, llamado teorema de superposición, nos indica que cualquier combinación lineal de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea es también solución; el teorema cuatro explica el uso del wronskiano para analizar soluciones linealmente dependientes.

Además, analizaremos una ecuación fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, la ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler y revisaremos soluciones combinadas de ecuaciones diferenciales como la suma de una ecuación diferencial completa y una ecuación diferencial reducida.

De acuerdo con nuestros propósitos formativos, en el referente de pensamiento para el eje 3, Pongamos en práctica, formulamos la pregunta: **¿De qué manera los programas de cálculo simbólico como GeoGebra apoyan la resolución de ecuaciones como la ecuación de Cauchy Euler y las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden?**

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Forma general de la ecuación diferencial lineal de orden superior

Dijimos en secciones anteriores que en general la ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots.+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=R(x) \qquad (1).$$

Si en esta ecuación diferencial, $R(x)=0$, la ecuación diferencial se llama ecuación diferencial homogénea de orden n, es decir,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots.+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad (2)$$

Cuando en la ecuación (2) los coeficientes de las derivadas y de la variable dependiente no dependen de la variable independiente, es decir, si los coeficientes $a_i(x)$ son todos constantes o números reales, ésta se transforma en una ecuación con coeficientes constantes:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots.+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0 \qquad (3)$$

En general, la ecuación (3) se llama ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes de orden n.

Forma general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

En lo que viene, nuestro interés se concentrará en las ecuaciones diferenciales lineales de orden 2. Esperaremos entonces ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad (4),$$

que como sabemos podemos escribir como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (5).$$

Volvamos a la ecuación (4), $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$. Esta ecuación se llama ecuación diferencial lineal de segundo orden, pero si $R(x) = 0$, la ecuación (4) se transforma en

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (6),$$

La ecuación (6) se llama ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Si $R(x) \neq 0$, como en (5), se dice que es una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

En la tarea de encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales a la ecuación (5) la llamaremos ecuación diferencial completa y a la ecuación (6) ecuación diferencial reducida.

Si además, hacemos que los coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ sean números reales (valores constantes), (6) se transforma en

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0 \qquad (7).$$

La ecuación (7) se llama ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes de orden 2.

Advierta que en la ecuación (5) el coeficiente de la segunda derivada de y, es decir, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es 1. Pero puede ocurrir que no lo sea, es decir, supongamos un coeficiente $T(x)$ que la transforma en

$$T(x)\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0.$$

Con una simple división de cada término de la última ecuación por el término $T(x)$ se vuelve a la ecuación (5).

Antes de verificar si una función o una familia paramétrica de funciones es o son soluciones de una ecuación diferencial, y como requisito previo al estudio de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, es necesario revisar cuatro teoremas. El primero nos garantiza la existencia de una solución para una ecuación diferencial bajo ciertas condiciones, y afirma que dicha solución es única; el teorema dos determina la solución general de una ecuación que relaciona la ecuación completa y su ecuación reducida; el teorema tres, llamado teorema de superposición, nos indica que cualquier combinación lineal de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea es también solución; el teorema cuatro explica el uso del wronskiano para analizar soluciones linealmente dependientes.

Teorema 1. Teorema de existencia y unicidad

Si en la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

suponemos que las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en algún subconjunto de números reales, por ejemplo en el intervalo cerrado de números reales $[a, b]$, y si $y_{0,}$ y_0' son números reales arbitrarios, podemos afirmar que la ecuación (5) tiene una y sólo una solución $y(x)$ en $[a, b]$ de tal menara que se cumple

$y(x_0) = y_{0,}$ y $y'(x_0) = y_0'$.

Entonces, el teorema nos afirma que, bajo esas condiciones, toda ecuación tiene al menos una solución y que dicha solución debe ser única.

Teorema 2. Solución combinada con una ecuación completa y una ecuación reducida

Si y_g es la solución general de la ecuación reducida

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

y si y_p es una solución particular de la ecuación completa

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

entonces $y_g + y_p$ es la solución general de la ecuación completa.

Teorema 3. Superposición

Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones diferentes de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

entonces $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es una solución para cualquier par de constantes c_1 y c_2.

El teorema de superposición nos garantiza que cualquier combinación lineal de dos soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial homogénea es también una solución. Advierta que si ninguna de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ es múltiplo de la otra, entonces $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ será la solución general de la ecuación homogénea. Para verificar esta condición, simplemente se debe dividir una función entre la otra y constatar que el resultado no sea una constante.

En los siguientes ejemplos revisaremos algunos aspectos relacionados con la verificación de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y detalles que relacionan los teoremas anteriores.

Ejemplo 1. Verificación de soluciones. Ejercicio No 2 tomado de Simmons (2007, 89). Verificar que las funciones

$y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = lnx$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$xy'' + y' = 0,$$

y escribir la solución general.

Solución.

Si $y(x) = 1 \Rightarrow y'(x) = 0,$ y $y''(x) = 0.$ Como $xy'' + y' = 0 \Rightarrow x(0) + 0 = 0,$

entonces $y_1(x) = 1$ es solución.

Si $y(x) = lnx \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x}$, y $y''(x) = -\frac{1}{x^2}.$ Como $xy'' + y' = 0 \Rightarrow$

$x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0,$ entonces $y_2(x) = lnx$ también es solución.

Por el teorema de superposición para ecuaciones homogéneas sabemos que la combinación lineal

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

también es una solución, es decir, $y = c_1(1) + c_2 ln$x es solución de la ecuación dada.

Advierta que el cociente entre $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = lnx,$ $\frac{1}{lnx}$, claramente no es constante.

Ejemplo 2. Verificación de soluciones. Tomado del ejercicio No 3 (Simmons, 2007, p.89):

a. Comprobar que $y_1(x) = e^{-x}$ y $y_2(x) = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación reducida $y'' - y' - 2y = 0$. ¿Cuál es su solución general?

b. Hallar a y b tales que $y_p = ax + b$ sea una solución particular de la ecuación completa $y'' - y' - 2y = 4x$. Usar esta solución junto con el resultado del apartado a para escribir la solución general de esta ecuación.

a. Si $y(x) = e^{-x} \Rightarrow y'(x) = -e^{-x}$, y $y''(x) = e^{-x}$. Como $y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow e^{-x} - (-e^{-x}) - 2(e^{-x}) = e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0$, entonces $y_1(x) = e^{-x}$ es solución.
Si $y(x) = e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}$, y $y''(x) = 4e^{2x}$. Como $y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2(e^{2x}) = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$, entonces $y_2(x) = e^{2x}$ es solución.

Por el teorema de superposición para ecuaciones homogéneas sabemos que la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución, es decir, $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es solución o solución complementaria de la ecuación dada.

b. Revisemos la ecuación completa (no homogénea) $y'' - y' - 2y = 4x$.
Como se supone que $y_p = ax + b$ es una solución particular de la ecuación completa, debemos encontrar los valores de a y b :

$y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a$, y $y_p'' = 0$. Reemplazando en $y'' - y' - 2y = 4x \Rightarrow$
$0 - a - 2(ax + b) = 4x \Rightarrow a - 2ax - 2b = 4x \Rightarrow (-2b + a) - (2a)x = 4x$, entonces igualando los coeficientes en x nos queda que

$$-2b + a = 0, \text{ y } -(2a) = 4 \Rightarrow a = -2.$$

Como $-2b + a = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{2} \Rightarrow b = -\frac{-2}{2} \Rightarrow b = 1$, luego la solución particular es $y_p = -2x + 1$, y la solución general de la ecuación completa no homogénea $y'' - y' - 2y = 4x$ es $y_c + y_p$, es decir,

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x + 1).$$

Ejemplo 3. Verificación de soluciones. A simple vista o a base de ensayos hallar una solución particular de la ecuación diferencial. Ejercicio No 4, tomado de Simmons (2007, p.89):

$$y'' - 2y = sinx.$$

Recordemos que al derivar la función $sinx$ siempre llegamos a una función $cosx$ y cuando derivamos la función $cosx$ siempre llegamos a una función $sinx$. Esta idea, y la experiencia que usted ya debe ir ganando después de haber tratado durante el módulo con estas funciones trigonométricas, nos hace pensar que la solución particular puede ser de la forma $y_p = Acosx + Bsinx$. Entonces calculemos y_p', y y_p'' :

$y_p = Acosx + Bsinx \Longrightarrow y_p' = -Asinx + Bcosx$, y $y_p'' = -Acosx - Bsinx$. Como $y'' - 2y = sinx \Longrightarrow (-Acosx - Bsinx) - 2(Acosx + Bsinx) = sinx \Longrightarrow$
$-Acosx - Bsinx - 2Acosx - 2Bsinx = sinx \Longrightarrow -3Acosx - 3Bsinx = sinx$, entonces igualando los coeficientes en $sinx$ y $cosx$ nos queda que
$-3A = 0 \Longrightarrow A = 0$, y $-3B = 1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{3}$, luego la solución particular buscada es $y_p = 0cosx + -\frac{1}{3}sinx$, es decir,

$$y_p = -\frac{1}{3}sinx.$$

Solución general de la ecuación homogénea de segundo orden

El wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots, f_n(x)$ tiene al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$w(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = [f_1\ f_2\ \cdots\ f_n\ f_1'\ f_2'\ \cdots\ f_n'\ \vdots\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ f_1^{n-1}\ f_2^{n-1}\ \cdots\ f_n^{n-1}]$$

en el que aparecen las funciones y sus $n-1$ derivadas inclusive, se llama el wronskiano de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots, f_n(x)$.
Para el caso que nos interesa, la ecuación diferencial homogénea de orden 2, el wronskiano es

$$w(y_1(x), y_2(x)) = |y_1\ y_2\ y_1'\ y_2'| = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'.$$

Como se ilustró en ejemplos anteriores, si dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ están definidas sobre algún conjunto de números reales, por ejemplo el intervalo $[a,b]$, y alguna de ellas es múltiplo constante de la otra, es decir, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ es diferente de cero, se dice que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente dependientes. Por otro lado, si ninguna es múltiplo constante de la otra, se afirma que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes.

El siguiente teorema nos permite identificar la linealidad o no linealidad de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea de orden 2.

Teorema 4. Soluciones linealmente dependientes

Dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ definidas sobre algún conjunto de números reales, por ejemplo el intervalo $[a,b]$, son linealmente dependientes sobre $[a,b]$ si y solo si su wronskiano es igual a cero, es decir, si

$$y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = 0.$$

Analicemos la independencia lineal de las funciones que componen la solución general $y = c_1 sinx + c_2 cosx$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ sobre cualquier intervalo y encontremos una solución particular con $y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

Verifiquemos que $y_1(x) = c_1 sinx,$ y $y_2(x) = c_1 cosx$ son soluciones.
Si $y(x) = c_1 sinx \Rightarrow y'(x) = c_1 cosx,\ y''(x) = -c_1 sinx.$

Como $y'' + y = 0 \Rightarrow -c_1 sinx + c_1 sinx = 0,$ entonces $y_1(x) = c_1 sinx$ es solución.

Si $y(x) = c_2 cosx \Rightarrow y'(x) = -c_2 sinx,\ y''(x) = -c_2 cosx.$
Como $y'' + y = 0 \Rightarrow -c_2 cosx + c_2 cosx = 0,$ entonces $y_2(x) = c_2 cosx$ es solución.

Para analizar la linealidad o no linealidad de las soluciones, primero revisemos si una solución es múltiplo de la otra.

Como $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{c_1 sinx}{c_2 cosx} = \frac{c_1}{c_2} tanx,$ haciendo $c_1 = c_2 \Rightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = tanx,$ entonces $y_1(x) = c_1 sinx$ y $y_2(x) = c_1 cosx$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$ en cualquier intervalo $[a,b]$.

Revisemos ahora la linealidad o no linealidad volviendo al teorema 4. El wronskiano $w\big(y_1(x), y_2(x)\big)$ es

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = |sinx\ cosx\ cosx\ -sinx\,| = sinx \cdot (-sinx) - cosx \cdot cosx$$
$$= -sin^2x - cos^2x = -(sin^2x + cos^2x) = -1.$$

Como el wronskiano $w\big(y_1(x), y_2(x)\big)$ es diferente de cero, en virtud del teorema 4, concluimos que $y_1(x) = c_1 sinx$ y $y_2(x) = c_1 cosx$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$.

Ya que $P(x) = 0$ y $Q(x) = 1$ son funciones continuas en $[a, b]$ podemos concluir que $y = c_1 sinx + c_2 cosx$ es la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ sobre $[a, b]$. Además, como el intervalo $[a, b]$ puede extenderse cuanto se quiera sin llegar a puntos de discontinuidad de $P(x)$ y $Q(x)$, entonces la solución general $y = c_1 sinx + c_2 cosx$ es válida para todo número real.

Finalmente queremos encontrar una solución particular con $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
Como $y = c_1 sinx + c_2 cosx \Longrightarrow 2 = c_1 sin0 + c_2 cos0 \Longrightarrow 2 = c_2$.
Como $y' = c_1 cosx - c_2 sinx \Longrightarrow 3 = c_1 cos0 - c_2 sin0 \Longrightarrow 3 = c_1$.
Entonces la solución particular es $y = 3sinx + 2cosx$.

Ejemplo 4. Independencia lineal de las soluciones.

Probar que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de $y'' - y = 0$ sobre cualquier intervalo.

Inicialmente verifiquemos que efectivamente $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones de $y'' - y = 0$.

Si $y(x) = e^x \Longrightarrow y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - y = 0 \Longrightarrow$

$e^x - e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$ es solución.

Si $y(x) = e^{-x} \Longrightarrow y'(x) = -e^{-x}$, y $y''(x) = e^{-x}$. Como $y'' - y = 0 \Longrightarrow$

$e^{-x} - e^{-x} = 0$, entonces $y_2(x) = e^{-x}$ es solución.

Para verificar la independencia lineal, encontramos que el cociente entre las dos funciones que son solución es $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{2x}$, que no es constante. Adicionalmente, calculamos el wronskiano:

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = y_1\ y_2\ y_1'\ y_2' = e^x\ e^{-x}\ e^x\ -e^{-x} = (e^x)\cdot(-e^{-x}) - (e^x)\cdot(e^{-x})$$
$$= -e^0 - e^0 = -2.$$

Como el wronskiano es diferente de cero, se puede afirmar que las soluciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo; esta última afirmación se concluye ya que tanto $y_1(x) = e^x$ como $y_2(x) = e^{-x}$ son funciones continuas en todo el dominio de los números reales.

Ecuación de Cauchy-Euler

Una ecuación fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden es la ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler, que en su forma general es

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x).$$

Los dos siguientes ejemplos ilustran su modo de solución.

Ejemplo 5. Ecuación de Cauchy-Euler.

Demostrar que $y = c_1x + c_2x^2$ es la solución general de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, sobre todo intervalo que no contenga al cero y hallar la solución particular para la cual $y(1) = 3$, $y'(1) = 5$.

La ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler, con $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, y $g(x) = 0$.

Como hemos procedido en ejemplos anteriores, al observar los factores lineales, podemos pensar en una sustitución adecuada ya que estos son polinomios. Supongamos entonces que una solución puede ser de la forma $y = x^m$. Al calcular las dos primeras derivadas nos queda:

$$y = x^m \Longrightarrow y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Reemplazando en la ED:

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 &\Longrightarrow x^2[m(m-1)x^{m-2}]' - 2x[mx^{m-1}] + 2x^m \\ &= m(m-1)x^{2+m-2} - 2mx^{1+m-1} + 2x^m = x^m[m(m-1) - 2m + 2] \\ &= x^m(m^2 - m - 2m + 2) = x^m(m^2 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow (m^2 - 3m + 2) = 0. \end{aligned}$$

Los valores que hacen cero (En la solución de varias ecuaciones diferenciales de segundo orden que aparecerán en lo que falta, se presenta con mucha frecuencia la necesidad de factorizar una ecuación de segundo grado de la forma y=ax2+bx+c, ya sea buscando los dos factores o usando la fórmula cuadrática

m=-b±b2-4ac2a.) esta última expresión es

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 2.$$

Luego las soluciones son $y_1(x) = x^{m_1}$, y $y_2(x) = x^{m_2}$, es decir,

$y_1(x) = x^1$, y $y_2(x) = x^2$, y la solución general nos queda

$$y = c_1x + c_2x^2.$$

Comprobación

Verifiquemos que efectivamente $y = c_1x + c_2x^2$ es la solución de la ED de Cauchy-Euler:

Como $y = c_1x + c_2x^2 \Longrightarrow y' = c_1 + 2c_2x,\ y'' = 2c_2$. Reemplazando en

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \Longrightarrow x^2(2c_2) - 2x(c_1 + 2c_2x) + 2(c_1x + c_2x^2) =$$

$$2c_2x^2 - 2c_1x - 4c_2x^2 + 2c_1x + 2c_2x^2 = 0.$$ Lo que demuestra que

$y = c_1x + c_2x^2$ es solución general de la ecuación sobre cualquier conjunto de números reales en el que no participe el cero. Además, el cociente $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ no es constante y muestra que x debe ser diferente de cero para que no haya indeterminación.

Busquemos ahora la solución particular con las condiciones

$$y(1) = 3,\ y'(1) = 5.$$

Como $y = c_1x + c_2x^2 \Longrightarrow 3 = c_1 + c_2$.

Como $y' = c_1 + 2c_2x \Longrightarrow 5 = c_1 + 2c_2$.

La solución del sistema $\{3 = c_1 + c_2\ 5 = c_1 + 2c_2\}$ es $c_1 = 1$, y $c_2 = 2$, entonces la solución particular requerida es

$$y = x + 2x^2.$$

Ejemplo 6. Ecuación de Cauchy-Euler.

Por inspección o por ensayo hallar dos soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 2y = 0$ sobre el intervalo $[1,2]$ y determine la solución particular que satisface las condiciones iniciales

$$y(1) = 1,\ y'(1) = 8.$$

La ecuación $x^2y'' - 2y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler, con $a = 1,\ b = 0,\ c = -2$, y $g(x) = 0$.
Nuevamente suponemos la solución $y = x^m$.

$y = x^m \Longrightarrow y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}$. Reemplazando en la ED:

$$x^2y'' - 2y = 0 \Longrightarrow x^2[m(m-1)x^{m-2}] - 2x^m = m(m-1)x^{2+m-2} - 2x^m$$
$$= x^m[m(m-1) - 2] = 0 \Longrightarrow m(m-1) - 2 = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow$$

$(m-2)(m+1) = 0$. Los valores que hacen cero esta última expresión es

$$m_1 = -1, \qquad m_2 = 2.$$

Luego las soluciones son $y_1(x) = x^{m_1}$, y $y_2(x) = x^{m_2}$, es decir,

$y_1(x) = x^{-1}$, y $y_2(x) = x^2$, y la solución general nos queda

$$y = c_1\frac{1}{x} + c_2x^2.$$

El cociente $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x^3}$ no es constante y muestra que las soluciones son linealmente independientes.

Adicionalmente, calculamos el wronskiano:

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \left|\frac{1}{x}\ x^2\ -\frac{1}{x^2}\ 2x\right| = \frac{1}{x}\cdot(2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2 = 2 + 1 = 3.$$

Como el wronskiano es diferente de cero, se puede afirmar que las soluciones $y_1(x) = x^{-1}$ y $y_2(x) = x^2$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo que no contenga al cero.

Finalmente encontremos la solución particular con $y(1) = 1,\ y'(1) = 8.$

$$\text{Como } y = c_1\frac{1}{x} + c_2x^2 \Longrightarrow 1 = c_1 + c_2.$$

$$\text{Como } y' = -c_1\frac{1}{x^2} + 2c_2x \Longrightarrow 8 = -c_1 + 2c_2.$$

La solución del sistema $\{3 = c_1 + c_2\ 8 = -c_1 + 2c_2\}$ es $c_1 = -2$, y $c_2 = 3$, entonces la solución particular requerida es

$$y = -2\frac{1}{x} + 3x^2.$$

Uso de una solución conocida para hallar otra

Como usted sospechará a estas alturas, no es sencillo encontrar una regla general que nos proporcione la posibilidad de encontrar las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Sin embargo, a sabiendas de la existencia de dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, linealmente independientes para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, sí existe un procedimiento para encontrar $y_2(x)$ si se conoce $y_1(x)$.

Si Suponemos que $y_2(x) = uy_1(x)$ es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx.$$

Como se puede verificar de manera muy sencilla, una solución evidente para la ecuación diferencial $xy'' + 3y' = 0$ es $y_1 = 1$. Al dividir la ecuación por x esta se transforma en $y'' + \frac{3}{x}y' = 0$, con lo que $\mathrm{P}(x) = \frac{3}{x}$. Entonces

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{1^2} e^{-\int \frac{3}{x}dx} dx = \int e^{-3\int \frac{dx}{x}} dx = \int e^{-3lnx} dx =$$

$$\int e^{lnx^{-3}} dx \Rightarrow u = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Rightarrow u = -\frac{1}{2x^2}.$$ Como $y_2(x) = uy_1(x) \Rightarrow$

$$y_2(x) = -\frac{1}{2x^2}(1) \Rightarrow y_2(x) = -\frac{1}{2x^2},$$ por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \Rightarrow y = c_1(1) + c_2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \Rightarrow y = c_1 - \frac{c_2}{2x^2} \Rightarrow y = c_1 - \frac{c_3}{x^2}.$$

En el siguiente ejemplo, vamos a resolver una ecuación diferencial de segundo orden en la que las funciones que aparecen dependientes de la variable x no se muestran como alguna combinación de otras funciones sino como una función general $f(x)$.

Ejemplo 7. Hallar la solución general de la ecuación diferencial. Ejercicio No 11, tomado de Simmons (2007, p.97):

$$y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$$

Debido a la forma de esta ecuación, como es costumbre suponemos que una de sus soluciones dependen de la función exponencial; en efecto vamos a suponer que una solución es $y_1 = e^x$. Ahora verifiquemos que en efecto lo es:

Si $y(x) = e^x \Rightarrow y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$

$\Rightarrow e^x - (e^x)(e^x) + [e^x - 1]e^x = e^x - e^{2x} + e^{2x} - e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$

es solución.

Si Suponemos que $y_2(x) = uy_1(x)$ es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral $u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$, advirtiendo que $P(x) = -f(x)$.

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -f(x)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int f(x)dx} dx = \int e^{-2x} e^{\int f(x)dx} dx \Rightarrow$$

$u = \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx$. Como $y_2(x) = y_1(x) \cdot u$, entonces

$y_2(x) = e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx$. La solución general es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx.$$

Ejemplo 8. Si n es un entero positivo, hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Ejercicio No 10, tomado de (Simmons, 2007, p.97):

$$xy'' - (x + n)y' + ny = 0.$$

Al dividir la ecuación por x esta se transforma en $y'' - \left(\frac{x+n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0 \Rightarrow y'' - \left(1 + \frac{n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0$

Nuevamente podemos suponer que una solución es $y_1 = e^x$. Ahora verifiquemos que en efecto lo es:

Si $y(x) = e^x \Rightarrow y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - \left(1 + \frac{n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0$

$\Rightarrow e^x - \left(1+\frac{n}{x}\right)(e^x) + \frac{n}{x}e^x = e^x - e^x - \frac{n}{x}e^x + \frac{n}{x}e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$ es solución. Busquemos la función u, sabiendo que $P(x) = -\left(1+\frac{n}{x}\right)$.

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -\left(1+\frac{n}{x}\right)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \left(1+\frac{n}{x}\right)dx} dx \Rightarrow$$

$$u = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \left(1dx + \mathrm{n}\frac{dx}{x}\right)} dx = \int e^{-2x} e^{\int \left(1dx+n\frac{dx}{x}\right)} dx = \int e^{-2x} e^{x+nlnx} \Rightarrow$$

$$u = \int e^{-2x+x} e^{lnx^n} \Rightarrow u = \int e^{-x} x^n \Rightarrow u = \int x^n e^{-x}.$$

Como $y_2(x) = y_1(x) \cdot u$, entonces $y_2(x) = e^x \int x^n e^{-x} dx$. La solución general es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int x^n e^{-x} dx.$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes

En secciones anteriores revisamos con detalle la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0,$$

que se presenta con mayor frecuencia de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

En esta sección es de nuestro interés el estudio de estas ecuaciones en las que los coeficientes de y' y y son términos de valor constante p y q, es decir, que no dependen de la variable independiente x. Ecuaciones de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1).$$

La ecuación (1) se llama ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes.

Para iniciar el proceso de solución de (1) es útil recordar que la función exponencial tiene la propiedad que establece que sus derivadas son múltiplos de ella misma, es decir, en los resultados de las derivadas de funciones exponenciales aparecen funciones exponenciales. Entonces es conveniente pensar que una solución para (1) puede ser precisamente una función exponencial de la forma $y = e^{mx}$, en la que debemos encontrar un valor adecuado para el valor m.

Siendo así, encontremos y' y y'' a partir de $y = e^{mx}$. Entonces

$y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mx} \Rightarrow y'' = m^2 e^{mx}$. Reemplazando en (1) nos queda

$m^2 e^{mx} + pme^{mx} + qe^{mx} = e^{mx}(m^2 + pm + q) = 0$, como $e^{mx} \neq 0$, entonces

$$m^2 + pm + q = 0 \qquad (2).$$

La ecuación (2) se llama la ecuación característica de (1). Esta es una ecuación de segundo grado´. Su solución es de la forma

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (3).$$

(3) tiene dos soluciones, $m_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ y $m_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Como recordará, al revisar el comportamiento del discriminante $p^2 - 4q$ en la ecuación (3), tenemos tres opciones:

Caso 1. Si $p^2 - 4q > 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales y distintas, entonces tenemos las dos soluciones

$$y_1 = e^{m_1 x} \text{ y } y_2 = e^{m_2 x}.$$

Como $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$, diferente de cero, estamos seguros que las soluciones son linealmente independientes, luego la solución general es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}.$$

Caso 2. Si $p^2 - 4q = 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales iguales, entonces tenemos solo una solución, $y = e^{mx}$, donde $m = -\frac{p}{2}$.

Podemos obtener otra solución linealmente independiente ya que conocemos una solución. Si Suponemos que $y_2(x) = uy_1(x)$, en la cartilla anterior vimos que podemos encontrar u mediante

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx, \text{ con } p = -2m.$$

Como $y_1(x) = e^{mx}$, entonces $u = \int \frac{1}{(e^{mx})^2} e^{-\int -2mdx} dx = \int \frac{1}{e^{2mx}} e^{\int 2mdx} dx \Rightarrow$

$$u = \int \frac{1}{e^{2mx}} e^{2mx} dx \Rightarrow u = \int 1 dx \Rightarrow u = x.$$

´ se presenta con mucha frecuencia la necesidad de factorizar una ecuación de segundo grado de la forma y-ax2+bx+c, ya sea buscando los dos factores o usando la fórmula cuadrática x- b+b2 4ac2a.

Como $y_2(x) = uy_1(x) \Rightarrow y_2(x) = xe^{mx}$, es otra solución, luego la solución general nos queda

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}.$$

Advierta que las dos soluciones son linealmente independientes:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{mx}}{xe^{mx}} = \frac{1}{x}.$$

Caso 3. Si $p^2 - 4q < 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces complejas y distintas, entonces tenemos las dos soluciones $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$.

En este caso, las dos soluciones de (3) son dos raíces complejas conjugadas, con $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$, con lo que tenemos

$y_1 = e^{(\alpha+\beta i\ )x}$ y $y_2 = e^{(\alpha+\beta i\ )x}$. Empleando la fórmula de Euler[2] estas soluciones se transforman en

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i\ )x} = e^{\alpha x} e^{i(\beta x)} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x).$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i\ )x} = e^{\alpha x} e^{-i(\beta x)} = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x).$$

Como $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x}}{2}[cos\beta x + isin\beta x - cos\beta x - isin\beta x] = e^{\alpha x}(cos\beta x)$, y

$\frac{y_1-y_2}{2i} = \frac{e^{\alpha x}}{2i}[cos\beta x + isin\beta x - cos\beta x - isin\beta x] = e^{\alpha x}(sin\beta x)$, entonces las dos soluciones son linealmente independientes, luego la solución general es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x).$$

En los ejemplos que vienen solucionaremos tres ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, cada una ilustrando el proceso para cada uno de los tres casos.

Ejemplo 9. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 1.

Resolver[3] $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2.$

Como $p^2 - 4q > 0$, es decir, $(-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales y distintas.

La ecuación característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$ es $m^2 - 5m + 6 = 0$ que se puede factorizar $(m-3)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 3$ y $m_2 = 2$.

---

[2] La fórmula de Euler es eiθ–θ+iθ.

[3] Ejercicio número 2a de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.101.

Las soluciones son

$$y_1 = e^{3x} \text{ y } y_2 = e^{2x}.$$

y la solución general nos queda

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Falta resolver la solución particular con , $y(1) = e^2$, $y'(1) = 3e^2$.

$$\text{Como } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \Longrightarrow y' = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} \Longrightarrow$$

$$e^2 = c_1 e^3 + c_2 e^2 = e^2(c_2 + c_1 e) \Longrightarrow 1 = c_2 + c_1 e$$

$$3e^2 = 3c_1 e^3 + 2c_2 e^2 = e^2(2c_2 + 3c_1 e) \Longrightarrow 3 = 2c_2 + 3c_1 e.$$

Nos quedó un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

$$\{1 = c_2 + c_1 e \; 3 = 2c_2 + 3c_1 e \} \Longrightarrow \{-3 = -3c_2 - 3c_1 e \; 3 = 2c_2 + 3c_1 e \} \Longrightarrow 0 = -c_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \text{ y } c_1 = \frac{1}{e}.$$

Por lo tanto, la solución particular nos queda

$$y = \frac{1}{e} e^{3x} + 0e^{2x} \Longrightarrow y = e^{3x} - 1.$$

Ejemplo 10. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 2.

Resolver el ejercicio número 2c de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.101):

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 5.$$

Como $p^2 - 4q = 0$, es decir, $(-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales iguales, entonces tenemos solo una solución, $y = e^{mx}$, donde $m = -\frac{p}{2}$, es decir $m = -\frac{-6}{2} \Longrightarrow m = 3$, con lo que la solución es $y = e^{3x}$. Sabemos que otra solución es de la forma $y_2(x) = xe^{mx}$, es decir, $y_2(x) = xe^{3x}$, por lo que su solución general es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

Falta resolver la solución particular con , $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

$$\text{Como } y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \Longrightarrow y' = 3c_1 e^{3x} + c_2[x(3e^{3x}) + e^{3x}] \Longrightarrow$$

$$y' = e^{3x}(3c_1 + 3c_2 x + c_2).$$

De $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$ nos queda $0 = c_1e^0 + c_20e^0 \Rightarrow c_1 = 0.$

De $y' = e^{3x}(3c_1 + 3c_2x + c_2)$ nos queda $5 = e^{3(0)}(3c_1 + 3c_20 + c_2) \Rightarrow 5 = 3c_1 + c_2 \Rightarrow$
$5 = 3(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 5.$

La solución particular con $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$ es $y = 5xe^{3x}$.

Ejemplo 11. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 3.

Ejercicio número 2d de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.101).

Resolver $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0.$

Como $p^2 - 4q < 0$, es decir, $(4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$, las dos soluciones son dos raíces complejas conjugadas, con $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$.

La ecuación característica de $y'' + 4y' + 5y = 0$ es $m^2 + 4m + 5 = 0.$

No sobra recordar de su curso de álgebra una forma alternativa de encontrar las raíces de la ecuación sin acudir a la fórmula cuadrática.

Encontremos m_1 y m_2.

$$m^2 + 4m + 5 = 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 + 1 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(m + 2)^2 = -1 \Rightarrow (m + 2) = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{-1} \Rightarrow m = -2 \pm i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m_1 = -2 + i \; m_2 = -2 - i\} \Rightarrow \{\alpha + \beta i \; = -2 + i \; \alpha - \beta i = -2 - i\} \Rightarrow 2\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -2, \qquad \beta = 1.$$

Entonces la solución general es $y = e^{-2x}(c_1cosx + c_2sinx)$.

Busquemos la solución particular con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

De $y = e^{-2x}(c_1cosx + c_2sinx)$ nos queda $1 = e^{-2(0)}(c_1cos0 + c_2sin0) \Rightarrow 1 =$
$1(c_1(1) + c_2(0)) \Rightarrow c_1 = 1.$

Como $y' = -2e^{-2x}[c_1cosx + c_2sinx] + [e^{-2x}(-c_1sinx + c_2cosx)]$, entonces

$$0 = -2e^{-2(0)}[c_1cos0 + c_2sin0] + \left[e^{-2(0)}(-c_1sin0 + c_2cos0)\right] \Rightarrow$$

$$0 = -2[c_1(1) + c_2(0)] + \left[1\left(-c_1(0) + c_2(1)\right)\right] \Rightarrow 0 = -2c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2c_1 \Rightarrow c_2 = 2.$$

Por lo tanto la solución particular es

$$y = e^{-2x}(cosx + 2sinx).$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 68 a 72.

Método de los coeficientes indeterminados

En secciones anteriores hemos visto métodos que permiten resolver ecuaciones de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (4),$$

en las que los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ hacen que la solución buscada esté dada por expresiones muy sencillas, diferentes de la solución trivial $y = 0$ o sean ellas mismas valores constantes. De igual forma hemos resuelto ecuaciones como (1) en las que $R(x) = 0$.

El método de los coeficientes indeterminados es un procedimiento que permite resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones como (4) en las que $R(x) \neq 0$, y los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son valores constantes p y q, es decir, ecuaciones de la forma

$$y'' + py' + qy = R(x) \qquad (5).$$

En general, para (5), el método de los coeficientes indeterminados es útil cuando $R(x)$ es una función exponencial, un polinomio de algún grado n, una función $sinu$, una función $cosu$, o una combinación de tales funciones como $x^n, x^n e^{ax}$, $x^n e^{ax} cos\beta x$, $x^n e^{ax} sin\beta x$, con n un número entero no negativo y α y β números reales.

No es aplicable cuando $R(x)$ es una función o combinación de funciones como lnx, $\frac{1}{x}$, $tanx$, $sin^{-1}x, cos^{-1}x$, etc.

Por ejemplo, pensemos en una solución para la ecuación no homogénea de la forma

$$y'' + py' + qy = e^{ax} \qquad (6).$$

Como los procesos de integración y derivación de funciones que contienen exponenciales como e^{ax} conservan y reproducen exponenciales con algún cambio en el coeficiente numérico, es natural pensar que $y_p = Ae^{ax}$ puede ser una posible solución.

Al coeficiente A se le llama el coeficiente indeterminado que debemos encontrar de tal manera que $y_p = Ae^{ax}$ satisfaga (6).

Si suponemos $y_p = Ae^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos y', y'' :

$$y = Ae^{ax} \Longrightarrow y' = Aae^{ax} \Longrightarrow y'' = Aa^2e^{ax}$$

Sustituyendo y, y', y'' en $y'' + py' + qy = e^{ax}$ nos queda

$$Aa^2e^{ax} + pAae^{ax} + qAe^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow A(a^2 + pa + q)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q} \qquad (7).$$

(7) funcionará mientras $a^2 + pa + q \neq 0$, ya que si $a^2 + pa + q = 0$, el valor a es una raíz de la ecuación auxiliar $m^2 + pm + q = 0$.

Recuerde que la ecuación característica de la ecuación homogénea y´´+py´+qy=0, es m2+pm+q=0.

Como vimos en secciones anteriores, cuando la ecuación característica tiene una raíz doble (m_1 y m_2), una segunda solución de la ecuación homogénea se obtiene multiplicando la primera solución por x; como la primera solución propuesta es $y = Ae^{ax}$, la segunda debe ser $y_p = Axe^{ax}$.

Si suponemos $y_p = Axe^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos y', y'' :

$$y = Axe^{ax} \Longrightarrow y' = A[(1)e^{ax} + x(ae^{ax})] = Ae^{ax}(1 + ax) \Longrightarrow$$

$$y'' = Ae^{ax}(a) + (1 + ax)aAe^{ax} = Ae^{ax}(a + a + a^2x) = Ae^{ax}(2a + a^2\text{x}).$$

Sustituyendo y, y', y'' en $y'' + py' + qy = e^{ax}$ nos queda

$$A(2a + a^2x)e^{ax} + p[A(1 + ax)]e^{ax} + q(Ax)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$2aAe^{ax} + a^2Axe^{ax} + pAe^{ax} + paAxe^{ax} + q(Ax)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = e^{ax}.$$

En esta última expresión, comparamos los coeficientes de los términos a cada lado de la igualdad y vemos que $a^2 + pa + q = 0$, ya que el término xe^{ax} no aparece en la miembro derecho y partimos que a es raíz de $m^2 + pm + q = 0$). Además, $A(2\text{a} + p) = 1$ por los coeficientes correspondientes de e^{ax}.

Entonces $A = \frac{1}{(2a+p)}$ es un coeficiente válido para $y = Axe^{ax}$, excepto cuando $a = -\frac{p}{2}$, es decir, cuando a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$.

Nuevamente, cuando la ecuación característica tiene una raíz doble (m_1 y m_2), una segunda solución de la ecuación homogénea se obtiene multiplicando esta solución por x; $y_p = Ax^2e^{ax}$.

Si suponemos $y_p = Ax^2e^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos y', y'' :

$$y = Ax^2e^{ax} \Longrightarrow y' = A[(2x)e^{ax} + ax^2(e^{ax})] \Longrightarrow$$

$$y'' = A[2e^{ax} + 2axe^{ax} + 2axe^{ax} + a^2x^2e^{ax}].$$

Al reemplazar en $y'' + py' + qy = e^{ax}$ y agrupar términos queda

$$A(a^2 + pa + q)x^2e^{ax} + 2A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = e^{ax}.$$

Tenga en cuenta que, es necesario que usted como estudiante siempre reproduzca y verifique los resultados que se obtienen. Generalmente se cometen algunos errores que pasan desapercibidos o que nadie corrige.

Como hemos supuesto que a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$, ambas expresiones $a^2 + pa + q$, y $2a + p$, son nulas, y por tanto $2Ae^{ax} = e^{ax}$, con lo que $A = \frac{1}{2}$.

Al resumir los resultados encontrados, tenemos

Si a no es raíz de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Ae^{ax}$.

Si a es raíz simple de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Axe^{ax}$.

Si a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Ax^2e^{ax}$.

Para utilizar este método debemos recordar que para resolver una ecuación diferencial no homogénea primero se determina la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada, y luego se establece alguna solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

La solución general de $y'' + py' + qy = R(x)$ en algún intervalo $[a, b]$ de números reales es $y = y_c + y_p$.

Instrucción

Le invitamos a resolver la primera parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Ejemplo 12. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ una función exponencial.

Ejercicio número 1c de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.107).

Encontrar la solución general de $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ (8).

Solucionemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 10y' + 25y = 0.$ Su ecuación característica es $m^2 + 10m + 25 = 0 \Longrightarrow (m+5)^2 = 0 \Longrightarrow m = -5,$ lo que nos lleva a la solución $y_1 = e^{-5x}$.

Como vimos en la cartilla anterior, la ecuación auxiliar admite dos soluciones reales repetidas, y sólo podemos hallar una solución por medio de ella, es decir, $y_2(x) = uy_1(x),$ que para este caso es $y_2(x) = x \cdot y_1(x) \Longrightarrow y_2(x) = xe^{-5x}$.

Por lo tanto la solución complementaria de la ecuación diferencial $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ es $y_c = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$.

Ahora debemos hallar la solución particular y_p. Un análisis inicial nos aproxima a suponer que $y_p = Ae^{-5x}$, sin embargo, es una elección incorrecta porque e^{-5x} ya hace parte de la solución complementaria y_c.

El paso siguiente es multiplicar Ae^{-5x} por x y suponer que $y_p = Axe^{-5x}$ es solución, pero xe^{-5x} también hace parte de la solución complementaria y_c.

Nuevamente multiplicar Axe^{-5x} por x y suponer que $y_p = Ax^2\mathrm{e}^{-5x}$ es solución. Esta elección es acertada ya que x^2e^{-5x} no hace parte de la solución complementaria y_c.

Entonces, con $y_p = Ax^2e^{-5x}$, $y_p' = 2Axe^{-5x} - 5Ax^2e^{-5x}$, y

$y_p'' = 2Ae^{-5x} - 10Axe^{-5x} - 10Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x}$. Reemplazando en (8) y agrupando términos nos queda

$$(2Ae^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x}) + 10(2Axe^{-5x} - 5Ax^2e^{-5x}) + 25(Ax^2e^{-5x}) = 14e^{-5x} \Longrightarrow 2Ae^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x} + 20\,Axe^{-5x} - 50Ax^2e^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x} = 14e^{-5x} \Longrightarrow 2Ae^{-5x} = 14e^{-5x} \Longrightarrow A = 7.$$

Por lo tanto, la solución particular es $y_p = 7x^2e^{-5x}$, y la solución general de (8) es de la forma $y = y_c + y_p$, es decir,

$$y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} + 7x^2e^{-5x} \Longrightarrow y = e^{-5x}[c_1 + c_2x + 7x^2]$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 78 a 84.

Ejemplo 13. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ un polinomio.

Encontrar la solución general del Ejercicio número 1d de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.107):

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12 \qquad (9).$$

Encontremos la solución de la ecuación reducida (homogénea):

$y'' - 2y' + 5y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 - 2m + 5 = 0$, que se resuelve como sigue: $m^2 - 2m + 5 = 0 \Longrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4 = 0 \Longrightarrow$

$$(m-1)^2 + 4 = 0 \Longrightarrow (m-1)^2 = -4 \Longrightarrow m - 1 = \sqrt{-4} \Longrightarrow m = 1 \pm 2i \Longrightarrow$$

$$\{m_1 = 1 + 2i \; m_2 = 1 - 2i\} \Longrightarrow \{\alpha = 1 \; \beta = 2\}.$$

En la sección anterior vimos que la solución general es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x).$$

Para nuestros valores de $\alpha = 1$, $\beta = 2$, la función complementaria y_c, es

$$y_c = e^x(c_1 cos2x + c_2 sin2x).$$

Ahora buscaremos la solución particular, y_p, de la ecuación completa (no homogénea). Como $R(x) = 25x^2 + 12$, un polinomio de segundo grado, debemos suponer que y_p es de esta forma, es decir, $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Entonces $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$. Reemplazando en (9) nos queda

$$2A - 2(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 + 12 \Longrightarrow$$

$$2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 25x^2 + 12 \Longrightarrow$$

$$5Ax^2 + (5B - 4A)x + (2A - 2B + 5C) = 25x^2 + 12$$

Al igualar los coeficientes correspondientes, tenemos

$$\{5A = 25\ A = 5.\},\left\{5B - 4A = 0\ 5B = 4A\ B = \frac{4A}{5}\ B = 4.\right\},\left\{2A - 2B + 5C = 12\ 2(5) - 2(4) + 5C = 12\ 5C = \frac{10}{5}\ C = 2.\right\}$$

Por lo tanto, la solución particular, y_p, es $y_p = 5x^2 + 4x + 2$, y la solución general $y = y_c + y_p$, es $y = e^x(c_1cos2x + c_2sin2x) + 5x^2 + 4x + 2.$

Instrucción

Le invitamos a resolver la segunda parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Ejemplo 14. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ la función $sinu$.

Si k y b son constantes positivas, hallar la solución general del Ejercicio número 2 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.107):

$$y'' + k^2y = sinbx \qquad (10).$$

La ecuación homogénea asociada es $y'' + k^2y = 0$, que tiene como ecuación característica $m^2 + k^2 = 0 \Longrightarrow (m - ki)(m + ki) = 0 \Longrightarrow$

$$\{m_1 = ki\ m_2 = -ki\} \Longrightarrow \{m_1 = 0 + ki\ m_2 = 0 - ki\} \Longrightarrow \{\alpha = 0\ \beta = k\}.$$

Como la solución general es de la forma $y = e^{\alpha x}(c_1cos\beta x + c_2sin\beta x)$, para nuestros valores de $\alpha = 0$, $\beta = k$, la función complementaria y_c, es

$$y_c = e^{0x}(c_1coskx + c_2sinkx) \Longrightarrow y_c = c_1coskx + c_2sinkx.$$

Busquemos ahora la solución particular y_p. Como $R(x) = sinbx$ podemos suponer que $y_p = Acosbx + Bsinbx \Longrightarrow \quad y'_p = -Absinbx + Bbcosbx$,

$y''_p = -Ab^2cosbx - Bb^2sinbx$. Reemplazando en (10) tenemos

$$= (-Ab^2cosbx - Bb^2sinbx) + k^2(Acosbx + Bsinbx) = sinbx \Longrightarrow$$

$$= -Ab^2cosbx - Bb^2sinbx + k^2Acosbx + k^2Bsinbx = sinbx \Longrightarrow$$

$= A(k^2 - b^2)cosbx + B(k^2 - b^2)sinbx = sinbx$. Igualando coeficientes:

$\{A(k^2 - b^2) = 0\ A = 0\}, \left\{B(k^2 - b^2) = 1\ B = \frac{1}{k^2-b^2}\right\}$, por lo tanto $y_p = Acosbx + Bsinbx$ nos queda $y_p = 0cosbx + \frac{1}{k^2-b^2}sinbx \Longrightarrow y_p = \frac{sinbx}{k^2-b^2}$, siempre y cuando $k \neq b$.

La solución general, $y = y_c + y_p$, es

$y = c_1coskx + c_2sinkx + \frac{sinbx}{k^2-b^2}$, sólo si $k \neq b$.

Si $k = b$, ahora (10) se transforma en $y'' + k^2y = sinbx$.

Encontramos que $y_c = c_1coskx + c_2sinkx$, pero como ahora $R(x) = sinkx$, no podemos suponer que $y_p = Acoskx + Bsinkx$, porque ésta ya hace parte de la solución complementaria y_c, entonces debemos suponer que

$$y_p = x(Acoskx + Bsinkx) \Longrightarrow$$

$$y'_p = Acoskx + Bsinkx + x(-kAsinkx + kBcoskx) \Longrightarrow$$

$$y'_p = Acoskx + Bsinkx + -kAxsinkx + kBxcoskx,$$

$$y''_p = -kAsinkx + kBcoskx - kAsinkx - k^2Axcoskx + kBcoskx - k^2Bxsinkx$$

$y''_p = -2kAsinkx + 2kBcoskx - k^2Axcoskx - k^2Bxsinkx$. Volviendo a (10)

$$\begin{aligned} &= (-2kAsinkx + 2kBcoskx - k^2Axcoskx - k^2Bxsinkx) + k^2[x(Acoskx + Bsinkx)] \\ &= sinkx \\ &\Longrightarrow -2kAsinkx + 2kBcoskx - k^2Axcoskx - k^2Bxsinkx + k^2Axcoskx \\ &+ k^2Bxsinkx = sinkx \Longrightarrow \end{aligned}$$

$2kBcoskx - 2kAsinkx = sinkx$. Igualando coeficientes:

$\{2kB = 0\ B = 0\}, \left\{-2kA = 1\ A = \frac{1}{-2k}\right\}$, por lo tanto $y_p = x(Acoskx + Bsinkx)$ nos queda

$$y_p = -\frac{xcoskx}{2k}.$$

Entonces la solución general $y = y_c + y_p$, cuando $k = b$, es

$$y = c_1 coskx + c_2 sinkx - \frac{xcoskx}{2k}.$$

Método del anulador

Una ecuación diferencial lineal de orden n se puede escribir como

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 D^1 y + a_0 y = g(x), \text{ en donde } D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}, \;\; k = 0,1,\cdots,n.$$

También se puede escribir como $L(x) = g(x)$ donde $L(x)$ representa el operador diferencial lineal de orden n:

$$L(x) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0.$$

La aplicación de operadores diferenciales permite llegar a la solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Por ejemplo, la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$, se puede escribir de la forma

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \Longrightarrow (D + 2)^2 y = 0.$$

Operador anulador

Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que $L[f(x)] = 0$, se dice que L es un anulador de la función.

Ejemplo 15. Determinar un operador diferencial que anule a

$$5e^{-x}cos2x - 9e^{-x}sin2x$$

Al examinar las funciones $e^{-x}cos2x$ y $e^{-x}sin2x$ podemos ver que $\alpha = -1$, y $\beta = 2$, por lo tanto tenemos que el operador anulador buscado debe tener la forma $(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^n$, es decir,

$(D^2 - 2(-1)D + ((-1)^2 + (2)^2))^1 \Longrightarrow D^2 + 2D + 5.$ Este operador lineal anulará cualquier combinación lineal de las funciones dadas como por ejemplo

$$5e^{-x}cos2x - 9e^{-x}sin2x$$

Método de variación de parámetros

En la sección anterior se resolvieron ecuaciones no homogéneas, donde $P(x)$ y $Q(x)$ eran valores constantes, es decir, no dependían de x, de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

En esta sección estudiaremos un método mucho más potente que no discrimina quienes sean $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, pueden o no ser constantes sino funciones que dependan de x, pero dejando como única restricción que se conozca la solución complementaria y_c, de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Entonces supongamos que por alguno de los métodos vistos hemos logrado la solución complementaria $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. El método de variación de parámetros nos permitirá reemplazar las constantes c_1 y c_2 por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ que buscamos de tal manera que

$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ sea la solución para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

Dejando la búsqueda de la demostración para el estudiante, estas funciones se consiguen así:

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx,$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx.$$

Recuerde que $w(y_1,y_2)$ representa el wronskiano de y_1 y y_2.

Entonces la solución $y_p = y_1\int \frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx + y_2\int \frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx.$

Apliquemos este método a la solución de la ecuación diferencial no homogénea $y'' + y = cscx$.

La ecuación homogénea asociada es $y'' + y = 0$. Esta se resolvió en secciones anteriores, y su solución es $y_c = c_1sinx + c_2cosx$. Luego $y_1 = sinx$ y $y_2 = cosx$, con $y_1' = cosx$, y $y_2' = -sinx$.

El wronskiano de y_1 y y_2 es

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = |sinx\ cosx\ cosx\ -sinx\ | = sinx \cdot (-sinx) - cosx \cdot cosx$$
$$= -sin^2x - cos^2x = -(sin^2x + cos^2x) = -1.$$

Entonces,

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{-cosxcscx}{-1}dx = \int \frac{cosx}{sinx}dx = \int cotxdx = lnsinx,$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{sinxcscx}{-1}dx = \int \frac{sinx}{sinx}dx = -\int dx = -x.$$

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ encontradas son $u_1(x) = lnsinx$ y $u_2(x) = -x$.

Por lo tanto, la solución buscada es

$$y_p = sinx[ln(sinx)] + cosx(-x) \Rightarrow$$

$$y_p = sinxln(sinx) - xcosx.$$

Ejemplo 16. Hallar una solución particular[4] de $y'' - y' - 6y = e^{-x}$.

La ecuación homogénea asociada es $y'' - y' - 6y = 0$, y su ecuación característica es $m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 3\; m_2 = -2$, entonces

$$y_c = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \Rightarrow y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x},\text{ con } y_1 = e^{3x} \text{ y } y_2 = e^{-2x}.$$

Ahora debemos encontrar la solución particular de $y'' - y' - 6y = e^{-x}0$, haciendo uso del método de variación de parámetros. Antes calculamos el wronskiano con $y_1 = e^{3x}$, $y_1' = 3e^{3x}$ y $y_2 = e^{-2x}, y_2' = -2e^{-2x}$.

$$w(y_1(x), y_2(x)) = |e^{3x}\; e^{-2x}\; 3e^{3x}\; -2e^{-2x}\;| = e^{3x}\cdot(-2e^{-2x}) - 3e^{3x}\cdot e^{-2x} = -2e^x - 3e^x = -5e^x.$$

Con el wronskiano, $w(y_1(x), y_2(x)) = -5e^x$, $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-2x}$, y $R(x) = e^{-x}$.

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{-e^{-2x}e^{-x}}{-5e^x}dx = \int \frac{-e^{-3x}}{-5e^x}dx = \frac{1}{5}\int e^{-4x} = -\frac{1}{20}e^{-4x}.$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{e^{3x}e^{-x}}{-5e^x}dx = \int \frac{e^{2x}}{-5e^x}dx = -\frac{1}{5}\int e^x dx = -\frac{1}{5}e^x.$$

Con $u_1(x) = -\frac{1}{20}e^{-4x}$, $u_2(x) = -\frac{1}{5}e^{x}$, la solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \Rightarrow$$

$$y_p = (-\frac{1}{20}e^{-4x})e^{3x} + (-\frac{1}{5}e^x)e^{-2x} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{20}e^{-x} + -\frac{1}{5}e^{-x} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{4}e^{-x}.$$

[4] Ejercicio número 2 de la sección de ejercicios propuestos del capitulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.111.

Ejemplo 17. Hallar la solución general de $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$.

Dividiendo la ecuación por (x^2-1) nos queda

$y'' - \frac{2x}{(x^2-1)}y' + \frac{2}{(x^2-1)}y = (x^2-1)$, y su ecuación homogénea asociada es $y'' - \frac{2x}{(x^2-1)}y' + \frac{2}{(x^2-1)}y = 0$. Por simple inspección, podemos ver que $y_1 = x$, es una solución de la ecuación reducida (homogénea), ya que

$y_1 = x \Longrightarrow y_1' = 1,\ y_1'' = 0 \Longrightarrow\ 0 - \frac{2x}{(x^2-1)}(1) + \frac{2}{(x^2-1)}x = 0 \Longrightarrow -\frac{2x}{(x^2-1)} + \frac{2x}{(x^2-1)} = 0.$

Podemos hallar una segunda solución y_2 a partir de y_1, así:

Si Suponemos que $y_2 = uy_1$ es una solución de $y'' - \frac{2x}{(x^2-1)}y' + \frac{2}{(x^2-1)}y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral[5]

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx.\ \text{Con}\ \ y_1 = x,\ \ P(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)}.$$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{2x}{(x^2-1)}dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{(x^2-1)}dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{ln(x^2-1)} dx = \int \frac{1}{x^2}(x^2-1)dx \Longrightarrow$$

$$u = \int \frac{x^2}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \int 1dx - \int x^{-1}dx = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow u = x + \frac{1}{x},\ \text{y}\ \ y_2 = uy_1 \Longrightarrow$$

$$y_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)x = x^2 + 1.\ \text{Entonces la solución complementaria es}$$

$$y_c = c_1 x + c_2(x^2+1).$$

Ahora debemos determinar y_p, $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1, y_2)}dx, \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1, y_2)}dx,\ \ R(x) = x^2 - 1.$$

Como $y_1 = x$, $y_1' = 1$, $y_2 = x^2+1$, $y_2' = 2x$, el wronskiano es

$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = |x\ x^2+1\ 1\ 2x\ | = x \cdot (2x) - 1 \cdot (x^2+1) = 2x^2 - x^2 - 1 = x^2 - 1.$
Entonces

$$u_1(x) = \int \frac{-(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)}dx = -\int (x^2+1)dx = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

$$u_2(x) = \int \frac{2x(x^2-1)}{(x^2-1)}dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

---

[5] 2xx2 1dx–2xzdz2x–dzz–z–ln(x2 1). Sea z–x2 1⟹dz–2xdx⟹dz2x–dx.

Por lo tanto

$y_p = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right)x + \frac{x^2}{2}(x^2+1) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$, y la solución general es $y = y_c + y_p$:

$$y = c_1x + c_2(x^2+1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Ejemplo 18. Probar que el método de variación de parámetros aplicado a la ecuación $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular del ejercicio número 5 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.111):

$$y_p(x) = \int_0^x f(t)sin(x-t)dt.$$

Resolvamos primero la ecuación reducida (homogénea) $y'' + y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$

$m_1 = i\ m_2 = -i \quad \Rightarrow \alpha = 0\ \beta = 1$, entonces la solución complementaria, y_c, es

$$y_c = e^{\alpha x}(c_1cos\beta x + c_2sin\beta x) \Rightarrow y_c = e^{0x}\big(c_1cos1(x) + c_2sin1(x)\big) \Rightarrow$$

$$y_c = c_1cosx + c_2sinx.$$

Encontremos y_p. $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde $y_1 = cosx$, $y_2 = sinx$.

Como $y_1 = cosx$, $y_1' = -sinx$, $y_2 = sinx$, $y_2' = cosx$, el wronskiano es

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = |cosx\ sinx\ -sinx\ cosx\ | = cosx \cdot (cosx) - (-sinx)\cdot sinx =$$
$$= cos^2x + sin^2x = 1 \Rightarrow w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = 1.$$

Entonces

$$u_1(x) = \int \frac{-sinxf(x)}{1}dx = \int f(x)sinxdx.$$

$$u_2(x) = \int \frac{cosxf(x)}{1}dx = \int f(x)cosxdx.$$

Entonces $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ nos queda

$$y_p = -cosx\int f(x)sinxdx + sinx\int f(x)cosxdx$$

$$= sinx\int f(x)cosxdx - cosx\int f(x)sinxdx \Longrightarrow$$

$$\int_0^x sinxf(t)costdt - \int_0^x c\int osxf(t)sintdt \Longrightarrow$$

$$\int_0^x [sinxcostf(t) - cosxsintf(t)]dt \Longrightarrow \int_0^x f(t)sin(x-t)dt \Longrightarrow$$

$y_p(x) = \int_0^x f(t)sin(x-t)dt$, como se quería demostrar.

Instrucción

Para finalizar, le invitamos a revisar un videoresumen de los contenidos del referente de pensamiento del eje 3.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, D., Álvarez, L., y Calzada, D. (2010). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos.*

Bargueño, F., y Alonso, D. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales: con introducciones teóricas.*

Blanes, Z., Ginestar, P., y Roselló, F. (2014). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.* Segunda. edición

Bobadilla, A., y Labarca, B. (2014). *Cálculo en una variable.*

Caicedo, A., y García, J. (2010). *Métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Camacho, A. (2010). *Cálculo diferencial.*

Castro, F. (2010). *Estabilidad: de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones funcionales: con sus aplicaciones.*

García, H. (2014). *Ecuaciones diferenciales.*

________. (2014). *Cálculo de varias variables.*

García, H., y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión.*

Guerrero, T. (2014). *Cálculo diferencial: serie universitaria patria.*

Index Mundi. (2017). *Colombia Tasa de crecimiento.*

López, M., y Acero, I. (2009). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas.* Segunda. Edición

Mesa, F. (2012). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción.*

Mombo, K. (2015). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias: una estrategia didáctica con integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el instituto superior de ciencias de la educación de Cabinda.*

Ortiz, C. (2014). *Cálculo diferencial.*

Ortiz, C., Ortiz, J., y Ortiz, F. (2015). *Cálculo diferencial.* Segunda. edición

Pagola, M., y López, G. (2017). *Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva.* Segunda. edición

BIBLIOGRAFÍA

Rivera, F. (2014). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias.*

Reyes, G. (2012). *Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas.*

Simmons, G. (2007). *Ecuaciones diferenciales.* Teoría, técnica y práctica. McGraw Hill.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr
San José, Costa Rica