ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

AUTOR: LUIS GUILLERMO CARO PINEDA

San Marcos

ÍNDICE

Ecuaciones diferenciales exactas . . . 5

Solución de ecuaciones diferenciales exactas . . . 7

Método de solución de una ecuación diferencial exacta de primer orden . . 9

Ecuaciones diferenciales lineales . . . 22

Ecuación diferencial de Bernoulli . . . 30

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden: Cables suspendidos . . . 33

Introducción a las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Reducción del orden . . . 35

Bibliografía . . . 39

INTRODUCCIÓN

En el referente de pensamiento para el eje 2 continuamos con la revisión de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Estudiaremos los métodos de solución de las Ecuaciones diferenciales exactas lo que nos obliga a revisar el concepto de diferencial total y de derivada parcial, y veremos el proceso para determinar un factor integrante cuando una ecuación diferencial de primer orden no cumple las condiciones para ser exacta. Como es costumbre, revisamos una aplicación de las ecuaciones diferenciales: la desintegración de sustancias radiactivas.

Avanzaremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y la ecuación diferencial de Bernoulli a la vez que revisaremos una aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales: circuitos en serie.

Finalizamos el eje 2 con el estudio de unas ecuaciones diferenciales de segundo orden que se pueden reducir a ecuaciones de primer orden ya sea por ausencia de la variable dependiente o la ausencia de la variable independiente.

De acuerdo con nuestros propósitos formativos, en el referente de pensamiento para el eje 2, Analicemos la situación, formulamos la pregunta: **¿Cómo resolver problemas de aplicación en diferentes contextos, por medio del uso de los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales exactas y lineales de primer orden?**

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones diferenciales exactas

Para iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden debemos recordar el concepto de diferencial total visto en cursos anteriores.

Diferencial total y derivadas parciales

Si se tiene una función $z = f(x, y)$, la diferencial total de z, dz, es la suma de las funciones, $f_x dx$ y $f_y dy$, donde f_x y f_y son las derivadas parciales de $f(x, y)$.

$$dz = d(f(x, y)) = f_x dx + f_y dy.$$

En la definición expuesta se supone por supuesto que las derivadas parciales deben ser continuas en algún intervalo de R^3.

Como usted recordará, encontrar las derivadas parciales de una función $f(x, y)$ exige que las variables x, y se examinen como variables independientes entre sí; es decir, al derivar $f(x, y)$ parcialmente con respecto a la variable x, la variable y es constante y así se asumirá siempre que aparezca en los cálculos. Así mismo, al derivar $f(x, y)$ parcialmente con respecto a la variable y, la variable x es constante.

En sus cursos anteriores de Cálculo, usted resolvió derivadas parciales. Sin embargo, es prudente calcular algunas derivadas parciales para recordar y extender las ideas previas.

Ejemplo 1. Determinar la diferencial total de la función

$$z = f(x, y) = 5x^4y^2 - 4xy^3 + 8.$$

Calculemos primero la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^3y^2 - 4y^3,$$

y ahora calculemos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^4y - 12xy^2$$

Entonces el resultado de la diferencial total de la función

$$z = f(x, y) = 5x^4y^2 - 4xy^3 + 8 \quad \text{es}$$

$$dz = d(f(x, y)) = f_x dx \; + f_y dy = (20x^3y^2 - 4y^3)dx + (10x^4y - 12xy^2)dy.$$

Advierta que la notación para derivadas parciales utiliza la notación con los símbolos

$$\frac{\partial z}{\partial x} \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ejemplo 2. Determinar la diferencial total de la función

$$z = f(x, y) = \frac{x^3 - 2y^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

Debemos usar inicialmente la regla para un cociente:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Calculemos primero la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial(x^3-2y^3+y^2)}{\partial x} - (x^3 - 2y^3 + y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(3x^2) - (x^3 - 2y^3 + y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^4+3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4+3x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Y ahora calculemos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial(x^3-2y^3+y^2)}{\partial y} - (x^3 - 2y^3 + y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)(-6y^2+2y)-(x^3-2y^3+y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-6x^2y^2+2x^2y-6y^4+2y^3-2x^3y+2y^4-2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4y^4-6x^2y^2+2x^2y-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Y el resultado de la diferencial total de la función

$$z=f(x,y)=\frac{x^3-2y^3+y^2}{x^2+y^2}$$

es

$$dz=\left(\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3+2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dx+\left(\frac{-4y^4-6x^2y^2+2x^2y-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right)dy$$

Solución de ecuaciones diferenciales exactas

Con las definiciones de diferencial total y el repaso del procedimiento para calcular derivadas parciales con respecto a las variables independientes x y y, ya podemos resolver otro tipo de ecuaciones diferenciales que se presentan en la lista de ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones diferenciales exactas.

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es una ecuación diferencial exacta si

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \quad \text{y} \quad N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=f_y.$$

En esta definición suponemos que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas y por lo menos para cada una de ellas se pueden determinar sus primeras derivadas parciales (que deben ser continuas) en algún intervalo de R^2.

Resolver una ecuación diferencial exacta consiste en encontrar una función $f(x,y)$ de tal manera que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada.

Para hacerlo, primero escribamos por simplicidad $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Derivemos ahora a M con respecto a y, y derivemos a N con respecto a x:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Como suponemos que las derivadas parciales son continuas podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \text{ con lo que } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Entonces para que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea exacta se debe verificar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Antes de encontrar un método para resolver ecuaciones diferenciales exactas, verifiquemos a través de los dos ejemplos siguientes, la condición de exactitud.

Ejemplo 3. Verificar que la ecuación diferencial $xdy + ydx = xcosxdx$ es exacta[*].

Inicialmente verificamos que la ecuación es de la forma

$Mdx + Ndy = 0$.

$$xdy + ydx = xcosxdx \Longrightarrow xdy + ydx - xcosxdx = 0 \Longrightarrow$$

$$(y - xcosx)dx + xdy = 0$$

con $M = y - xcosx$, y $N = x$.

La condición de exactitud exige que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (y - xcosx)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (x)}{\partial x} = 1$$

Luego $xdy + ydx = xcosxdx$ es exacta.

---

[*] Ejercicio número 8 de la sección de ejercicios propuestos del capitulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Ejemplo 4. Verificar que la ecuación diferencial

$$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3 \text{ es exacta}^{2}.$$

Inicialmente verificamos que la ecuación es de la forma

$$Mdx + Ndy = 0.$$

$$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3 \Longrightarrow (e^x - 3x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy^3 - ye^x \Longrightarrow$$

$$(e^x - 3x^2y^2)dy = -(ye^x - 2xy^3)dx \Longrightarrow (ye^x - 2xy^3)dx + (e^x - 3x^2y^2)dy = 0.$$

Tenemos entonces que $M = ye^x - 2xy^3$ y $N = e^x - 3x^2y^2$.

La condición de exactitud exige que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(ye^x - 2xy^3)}{\partial y} = e^x - 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(e^x - 3x^2y^2)}{\partial x} = e^x - 6xy^2$$

Teniendo claridad en la identificación de una ecuación diferencial exacta, a continuación, se expone el procedimiento para su resolución.

Método de solución de una ecuación diferencial exacta de primer orden

Paso 1. Identificar que efectivamente la ecuación diferencial es exacta, es decir verificar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M.$ sabemos que esto se logra integrando la función M con respecto a x, es decir, integrar parcialmente $M(x, y)$ con respecto a x

$$f = \int Mdx + g(y).$$

[2] Ejercicio número 10 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a y, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{dg}{dy}$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función g, es decir, $g = \int \frac{dg}{dy}$.

La solución requerida es

$$\int M dx + g(y) = c.$$

Ejemplo 5. Volvamos al ejemplo 4. Allí se propuso la ecuación diferencial

$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$. Esta ecuación se llevó a la forma

$(ye^x - 2xy^3)dx + (e^x - 3x^2y^2)dy = 0$ y se verificó el **paso 1**, es decir, que es exacta.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$. sabemos que esto se logra integrando la función M con respecto a x, es decir, integrar parcialmente $M(x, y)$ con respecto a x:

$$f = \int M dx + g(y). \text{ Entonces}$$

$$f = \int M dx + g(y) = \int (ye^x - 2xy^3)dx + g(y) = \int ye^x dx - \int dx + g(y) \Longrightarrow$$

$$f = ye^x - 2y^3 + g(y).$$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a y, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{dg}{dy}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (ye^x - 2y^3)}{\partial y} + \frac{dg}{dy} = e^x - 6y^2 + \frac{dg}{dy}.$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

$$e^x - 6y^2 + \frac{dg}{dy} = e^x - 3x^2y^2 \Longrightarrow \frac{dg}{dy} = 6y^2 - 3x^2y^2.$$

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función g, es decir, $g = \int \frac{dg}{dy}$.

$$\int \frac{dg}{dy} = g = \int (6y^2 - 3x^2y^2)dy = \int 6y^2 dy - \int 3x^2y^2 dy = 2y^3 - x^2y^3.$$

Entonces la solución es

$$\int Mdx + g(y) = c.$$

Es decir,

$$ye^x - 2y^3 + 2y^3 - x^2y^3 = c.$$

$$ye^x - x^2y^3 = c.$$

Como se puede sospechar es necesario saber si la respuesta obtenida es correcta. Por supuesto que podemos comprobarlo, atendiendo el teorema fundamental del Cálculo, es decir, derivando la solución $ye^x - x^2y^3 = c$, obtenemos la ecuación diferencial propuesta.

Advierta que para verificar la solución encontrada, debemos nuevamente considerar que la variable dependiente es y y la variable independiente es x.

Comprobación. Verifiquemos entonces que la solución de la ecuación diferencial exacta

$$(ye^x - 2xy^3)dx + (e^x - 3x^2y^2)dy = 0$$

es

$$ye^x - x^2y^3 = c.$$

Como la solución tiene dos términos vamos a derivar cada término por aparte y luego los ubicamos en la solución final:

$$(ye^x)' = ye^x + y'e^x.$$

$$(-x^2y^3)' = -x^2 3y^2 y' - 2xy^3.$$

Entonces la solución nos queda

$$ye^x + y'e^x - x^2 3y^2 y' - 2xy^3 = 0 \implies (e^x - 3x^2y^2)y' + (ye^x - 2xy^3) = 0.$$

Es conveniente escribir y' de la forma $\frac{\partial y}{\partial x}$, lo que convierte la expresión anterior en

$$(e^x - 3x^2y^2)\frac{dy}{dx} + (ye^x - 2xy^3) = 0.$$

Multiplicando por dx cada término de la igualdad llegamos a la ecuación diferencial exacta propuesta

$$(ye^{x}-2xy^{3})dx+(e^{x}-3x^{2}y^{2})dy=0.$$

Ejemplo 6. Volvamos al ejemplo 3. Allí se propuso la ecuación diferencial

$(y-xcosx)dx+xdy=0$ y se verificó el **paso 1**, es decir, que es exacta.

A continuación detallaremos el mismo procedimiento descrito en el ejemplo 5 pero empezando con la integral de la función N con respecto a y, es decir, integrar parcialmente $N(x,y)$ con respecto a y. El método previsto cambia las variables de integración y derivación respectivamente, pero evidentemente nos lleva al mismo resultado.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y}=N.$ Sabemos que esto se logra integrando la función N con respecto a y, es decir, integrar parcialmente $N(x,y)$ con respecto a y:

$$f=\int Ndy+g(x).$$

$$\text{Entonces } f=\int Ndy+g(x)=\int xdy+g(x)=xy+g(x).$$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a x, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\int Ndy}{\partial x}+\frac{dg}{dx}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(xy)}{\partial x}+\frac{dg}{dx}=y+\frac{dg}{dx}.$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}=M$.

$$y+\frac{dg}{dx}=y-xcosx \implies \frac{dg}{dx}=-xcosx.$$

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dx}$ para determinar la función g, es decir, $g=\int\frac{dg}{dx}$.

$$g=\int -xcosxdx=-xsinx-cosx.$$

Entonces la solución es

$$\int Ndy+g(x)=c.$$

Es decir,

$$xy - xsinx - cosx = c.$$

Comprobación. Debemos comprobar que la solución de la ecuación diferencial exacta

$$(y - xcosx)dx + xdy = 0$$

es

$$xy - xsinx - cosx = c.$$

Como la solución tiene tres términos vamos a derivar cada término por aparte y luego los ubicamos en la solución final:

$$(xy)^{\prime} = y + xy^{\prime}.$$

$$(xsinx)^{\prime} = xcosx + sin\mathrm{x}.$$

$$(cosx)^{\prime} = -sinx.$$

Entonces la solución completa nos queda

$$y + xy^{\prime} - xcosx - sinx + sinx = 0 \implies y - xcosx + xy^{\prime} = 0 \implies y - xcosx + x\frac{dy}{dx} = 0$$

Es decir, $(y - xcosx)dx + xdy = 0$, que era el resultado por verificar.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación diferencial del ejercicio número 32 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons (2007, p.79):

$$(\frac{3y^2}{x^2 + 3x})dx + (2yln\frac{5x}{x+3} + 3siny)dy = 0$$

Paso 1. Verifiquemos que sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{3y^2}{x^2+3x}\right)}{\partial y} = \frac{3}{x^2 + 3x}2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(2yln\frac{5x}{x+3}+3siny)}{\partial x}=2y\frac{(x+3)}{5x}\cdot\frac{(x+3)(5)-(5x)(1)}{(x+3)^2}=2y\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x+15-5x}{(x+3)}$$
$$=2y\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x+15-5x}{(x+3)^2}=2y\frac{15}{5x(x+3)}=\frac{3}{x^2+3x}2y$$

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y}=N\;\Longrightarrow f=\int Ndy+g(x)$.

$$f=\int(2yln\frac{5x}{x+3}+3siny)dy+g(x)=ln\frac{5x}{x+3}\int 2ydy+3\int sinydy+g(x)$$

$$f=y^2ln(\frac{5x}{x+3})-3cosy+g(x)$$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\left(y^2ln(\frac{5x}{x+3})-3cosy\right)}{\partial x}+\frac{dg}{dx}=y^2\frac{(x+3)}{5x}\cdot\frac{(x+3)(5)-(5x)(1)}{(x+3)^2}+\frac{dg}{dx}=\frac{3y^2}{x^2+3x}+\frac{dg}{dx}\;.$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}=M$.

$$\frac{3y^2}{x^2+3x}+\frac{dg}{dx}=\frac{3y^2}{x^2+3x}\;\Longrightarrow\;\frac{dg}{dx}=0\;\Longrightarrow g(x)=0.$$

Entonces la solución es

$$y^2ln(\frac{5x}{x+3})-3cosy=c$$

Comprobación. Derivemos en la misma la línea la solución encontrada

$$[y^2ln(\frac{5x}{x+3})-3cosy=c]'=y^2\frac{3}{x^2+3x}+2yy'ln(\frac{5x}{x+3})+3sin(y)\cdot y'=0$$

$$=\frac{3y^2}{x^2+3x}+\left[\left(2yln(\frac{5x}{x+3})+3sin(y)\right)\right]y'\Longrightarrow(\frac{3y^2}{x^2+3x})dx+(2yln\frac{5x}{x+3}+3siny)dy=0.$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 68 a 79.

Factor integrante.

En muy pocas ocasiones la ecuación diferencial de la forma

$$Mdx + Ndy = 0,$$

es exacta, ya que la exactitud que supone requiere un adecuado cálculo en que se debe presentar dicha ecuación; entonces usted advertirá sobre la aparente necedad de querer resolverlas. Sin embargo, en la presente sección justificaremos el esfuerzo causado.

Si la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ no es exacta, en algunas ocasiones es posible transformarla en una ecuación que sí lo sea, buscando una función $H(x, y)$ que al ser multiplicada por dicha ecuación, la convierta en exacta. Esto es

$$H(x, y)[Mdx + Ndy] = 0 \text{ es exacta.}$$

A la función $H(x, y)$ se le llama factor de integración de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$.

Existen tres formas posibles de encontrar la función $H(x, y)$:

1. La función $H(x, y)$ solo depende de la variable x.
   Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$, entonces el factor integrante
   $$H(x, y) = e^{\int f(x)dx}$$
2. La función $H(x, y)$ solo depende de la variable y.
   Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces el factor integrante
   $$H(x, y) = e^{\int g(y)dy}$$
3. Si $M = yf(xy)$ y $N = xg(xy) \implies H(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$.

Instrucción

Le invitamos a realizar la primera parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Como lo hemos advertido, la búsqueda de un factor integrante puede no tener éxito, y no queda otra alternativa que buscar soluciones en otros métodos. Por otra parte, si la búsqueda del factor integrante, $H(x,y)$ tiene éxito, solo nos queda resolverla por los métodos vistos en la sección anterior para ecuaciones diferenciales exactas.

En el ejemplo siguiente, nos presentan una ecuación diferencial que no es exacta, pero que se puede transformar en exacta mediante la condición 2, es decir, la función $H(x,y)$ solo depende de la variable y.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación diferencial (Simmons, 2007, p.79):

$$(1-xy)y' = y^2.$$

Esta ecuación diferencial no es exacta, ya que aunque podemos escribirla de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es decir, $y^2dx + (xy-1)dy = 0$. Las derivadas parciales correspondientes no son iguales como se verifica enseguida:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\,y^2)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(xy-1)}{\partial x} = y$$

Volviendo a la condición 2, como la ecuación no es exacta, procedemos a encontrar un factor integrante de la forma

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces el factor integrante es

$$H(x,y) = e^{\int g(y)dy}$$

Busquémoslo:

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2}(y - 2y) = \frac{-y}{y^2} \Longrightarrow H(x,y) = g(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{lny^{-1}} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

El factor integrante es entonces $g(y) = \frac{1}{y}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$. Así:

$y^2dx + (xy-1)dy = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}y^2dx + \frac{1}{y}(xy-1)dy = ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$. Verifiquemos que la nueva ecuación $ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$ es exacta con $M = y$, y $N = \left(x - \frac{1}{y}\right) \Longrightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\left(x - \frac{1}{y}\right)}{\partial x} = 1.$$

Para resolver $ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$ sigamos los 5 pasos en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M \Longrightarrow f = \int Mdx + g(y) \Longrightarrow f = \int ydx + g(y) \Longrightarrow f = xy + g(y)$. Derivar parcialmente f con respecto a y, es decir, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{dg}{dy}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Longrightarrow x + \frac{dg}{\mathrm{d}y} = x - \frac{1}{y} \Longrightarrow \frac{dg}{dy} = -\frac{1}{y}$. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función $g \Longrightarrow g = -\int \frac{dy}{y} = -lny = lny^{-1} = ln\frac{1}{y}$.

Y la solución es

$$\int Mdx + g(y) = c.$$

Es decir,

$$c = xy + ln\frac{1}{y}$$

Comprobación. Derivemos en la misma la línea la solución encontrada (En la comprobación aparece la derivada de un logaritmo: u'=1uu'.)

$$c = xy + ln\frac{1}{y}:$$

$$0 = xy' + y + \frac{1}{\frac{1}{y}} \cdot \frac{-y'}{y^2} = xy' + y - \frac{y'}{y} = \left(x - \frac{1}{y}\right)y' + y \Longrightarrow ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Ejemplo 9. Resolver la ecuación diferencial, la cual corresponde al ejercicio 25 (Simmons, 2007, p. 79):

$$e^x(1+x)dx = (xe^x - ye^y)dy.$$

Organizando los términos de la forma

$Mdx + Ndy = 0 \Longrightarrow e^x(1+x)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$, vemos que no es exacta porque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(e^x(1+x))}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(ye^y - xe^x)}{\partial x} = -e^x(1+x)$. Buscamos el factor integrante que debe ser

$$M(y) = ce^{\int \frac{w}{-M}dy}, \text{ con } w = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow w = \frac{\partial(e^x(1+x))}{\partial y} - \frac{\partial(ye^y - xe^x)}{\partial x} = e^x(1+x) \Longrightarrow$$

$$M(y) = e^{\int \frac{e^x(1+x)}{-e^x(1+x)}dy} = e^{-\int dy} = e^{-y} = \frac{1}{e^y}.$$

El factor integrante es entonces $M(y) = \frac{1}{y}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $e^x(1+x)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$. Así:

$$\frac{1}{e^y}e^x(1+x)dx + \frac{1}{e^y}(ye^y - xe^x)dy = 0 \Longrightarrow \frac{e^x}{e^y}(1+x)dx + \left(y - \frac{xe^x}{e^y}\right)dy = 0 \Longrightarrow$$

$e^{x-y}(1+x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$. Verifique que efectivamente es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(e^{x-y}(1+x))}{\partial y} = -(1+x)e^{x-y} = \frac{\partial(-xe^{x-y})}{\partial x}.$$

Para resolver (Miremos la solución de xex-ydy. Sea u=x-y ⟹du=-dy ⟹xex-ydy=-xeudu=-xeu= -xex-y .) $e^{x-y}(1+x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$ sigamos los 5 pasos en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Longrightarrow f = \int Ndy + g(x) \Longrightarrow$

$f = \int (y - xe^{x-y})dy + g(x) = \int ydy - \int xe^{x-y}dy + g(x) \Longrightarrow f = \frac{y^2}{2} + xe^{x-y} + g(x)$.

Derivar parcialmente f con respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x} = -(1+x)e^{x-y} + \frac{dg}{dx}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial x} = M \Longrightarrow$

$$= -(1+x)e^{x-y} + \frac{dg}{dx} = e^{x-y}(1+x) \Longrightarrow \frac{dg}{dx} = 0 \Longrightarrow g(x) = 0.$$

Y la solución es

$$\int Ndy + g(x) = c.$$

Es decir, $c = y^2 + 2xe^{x-y}$

Comprobación.

Derivemos en la misma la línea la solución encontrada $c = y^2 + 2xe^{x-y}$:

$$0 = 2yy' + 2[x(e^{x-y}(1 - y') + e^{x-y}] \Longrightarrow 0 = y'(y - xe^{x-y}) + (1 + x)e^{x-y} \Longrightarrow$$

$$e^{x-y}(1 + x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0.$$

Algunos de los factores de integración que se presentan con mayor frecuencia se muestran en la tabla 1.

Forma de los términos de la ecuación diferencial	**Factor de integración $H(x,y)$**	**Diferencial exacta**
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
$ydx - xdy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{y^2} = d(\frac{x}{y})$
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(ln\frac{y}{x})$
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\tan^{-1}\frac{x}{y})$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx + xdy}{xy} = d(lnxy)$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{(xy)^n}$, $n > 1$	$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d[(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}})]$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} = d(\frac{1}{2}lnx^2 + y^2)$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$, $n > 1$	$\frac{ydy + xdx}{(x^2 + y^2)^n} =$ $d[(\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}})]$
$aydx - bxdy \quad a, b \text{ constantes}$	x^{a-1}, y^{b-1}	$x^{a-1}\ y^{b-1}(aydx + bxdy) = d(x^a y^b)$

Tabla 1. Algunos factores de integración
Fuente: propia

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales: desintegración de sustancias radiactivas

Como sabemos, los núcleos de los átomos son composiciones combinadas de neutrones y protones, pero por muchas razones, algunas de esas combinaciones son inestables hasta llevar a la desintegración de los átomos. Esta condición se conoce como desintegración radiactiva. La razón de cambio (o tasa de cambio) con que los núcleos de una sustancia se desintegran es proporcional al número de núcleos de la sustancia restante en cierto tiempo t. Si N es la cantidad de núcleos ya podemos sospechar (por la similitud de este modelo matemático con las aplicaciones de los ejemplos anteriores), que la relación de proporcionalidad nos queda (Figura 1):

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Aunque el modelo matemático para la desintegración radiactiva que acabamos de deducir es utilizado en el universo de las ciencias físicas, también se aplica en sistemas biológicos, por ejemplo para calcular cuánto puede ser la vida de un medicamento, es decir, una medida de tendencia central que nos describa su vida media. En otras palabras, el tiempo que tarda el organismo en eliminar la mitad de éste por los procesos biológicos de metabolización o excreción.

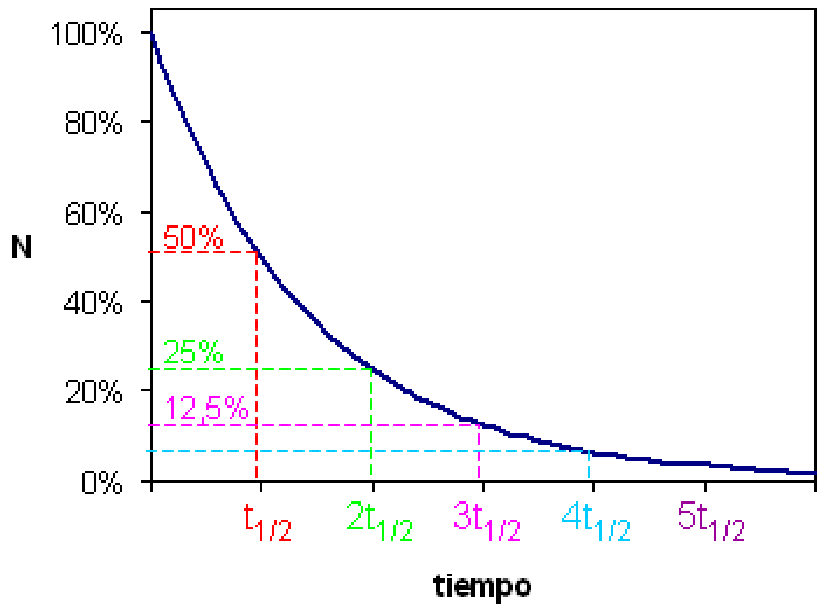

Figura 1. Desintegración de sustancias radiactivas.
Fuente. http://biomodel.uah.es/tecnicas/isotopos/inicio.htm

Ejemplo 10. Desintegración radiactiva (Adaptación de un problema similar encontrado en (http://ocw.uc3m.es/matematicas/ecuaciones-diferenciales-ordinarias/pruebas-de-evaluacion-1/EDOexamsolene09.pdf) del PB-209, isótopo radiactivo del plomo.

El PB-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en algún instante y tiene una vida promedio de 3,3 horas (esto significa que en cualquier momento hay el doble de isótopo que 3,3 horas después). Si inicialmente se tiene un gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre un 80%?

Sea $N(t)$ la cantidad de PB-209 (gramos) presente en el instante t (horas).

El modelo matemático para la desintegración radiactiva es

$$\frac{dN}{dt} = -kN, \quad k > 0.$$

Resolviendo para N, tenemos $\frac{dN}{dt} = -kN \Longrightarrow \frac{dN}{N} = -kdt \Longrightarrow lnN = kt + c$. Para determinar la constante de integración c, es necesario establecer las condiciones iniciales, es decir, para una población en determinado instante que tomamos como inicial, $N = N_0$ cuando $t = 0$.

Volviendo al resultado preliminar $lnN = kt + c \Longrightarrow lnN_0 = k(0) + c \Longrightarrow c = lnN_0$.

Entonces, $lnN = kt + c \Longrightarrow lnN = kt + lnN_0 \Longrightarrow e^{lnN} = e^{(kt+lnN_0)} \Longrightarrow$

$$P = e^{kt} \cdot e^{lnN_0}.$$

En esta última expresión el término e^{lnN_0} es una nueva constante P_0, y llegamos a

$$N = N_0 e^{kt}.$$

Sabemos que en el instante inicial se tiene un gramo de plomo, es decir,

$$N(0) = 1 \Longrightarrow 1 = N_0 e^{k(0)} \Longrightarrow 1 = N_0$$

Nos falta determinar k. Para hacerlo sabemos que la semivida del plomo es 3,3 horas, lo que significa que después de 3,3 horas debe quedar la mitad del PB-209 del inicio, es decir, $N(3{,}3) = 0{,}5$. Entonces

$$\frac{1}{2} = e^{(-3,3)k} \Longrightarrow ln\frac{1}{2} = lne^{(-3,3)k} \Longrightarrow ln\frac{1}{2} = -3{,}3k \Longrightarrow k = \frac{ln\frac{1}{2}}{-3{,}3} \Longrightarrow k = \frac{ln2}{3{,}3}$$

Al reemplazar los valores $1 = N_0$ y $k = \frac{ln2}{3,3}$ encontrados, la ecuación diferencial particular nos queda

$$N = e^{-\frac{ln2}{3,3}t}$$

Con el modelo matemático encontrado, nos piden el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre un 80%, es decir, $N(t) = 0,2$. Entonces

$$0,2 = e^{-\frac{ln2}{3,3}t} \Longrightarrow ln0,2 = -\frac{ln2}{3,3}t \Longrightarrow t = 3,3\frac{ln0,2}{-ln2} \Longrightarrow t = 3,3\frac{ln20}{ln2} \Longrightarrow t = 14,26.$$

Es decir, deben pasar un poco más de 14 horas para que PB-209, isótopo radiactivo del plomo se desintegre un 80%.

Ecuaciones diferenciales lineales

En secciones anteriores revisamos el concepto de una ecuación diferencial lineal.

La ecuación diferencial $F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0$ se llama lineal si F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^n$. La forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n es

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Estas se caracterizan porque son de grado 1 en la variable dependiente y y en todas sus derivadas, y todos los coeficientes

$$a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), a_0(x)$$

sólo dependen de x.

Si la función $f(x, y)$ se puede escribir como $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$, entonces $f(x, y)$ es lineal.
En general, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se pueden escribir como

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Debe advertir que los coeficientes, $P(x)$ y $Q(x)$ solo dependen de la variable x (o en su defecto funciones constantes).

La forma más sencilla de resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, se basa en la solución de la derivada del producto de las funciones $e^{\int Pdx}$ y y:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}.y\right)=e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+yPe^{\int Pdx}=e^{\int Pdx}(\frac{dy}{dx}+Py)$$

Multiplicando $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ por $e^{\int Pdx}$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx}e^{\int Pdx}+P(x)ye^{\int Pdx}=Q(x)e^{\int Pdx}\Longrightarrow e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)=Q(x)e^{\int Pdx}\Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}.\mathrm{y}\right)=Q(x)e^{\int Pdx}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad

$$\int d\left(e^{\int Pdx}.y\right)=\int Q(x)e^{\int Pdx}dx\Longrightarrow e^{\int Pdx}.y=\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c\;\Longrightarrow$$

$$e^{\int Pdx}.y=\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c\;\Longrightarrow\; y=\frac{1}{e^{\int Pdx}}\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c\;\Longrightarrow$$

$y=e^{-\int Pdx}(\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c\,)$ es la solución de $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$.

Ejemplo 11. Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $y'-2y=5$.

Esta ecuación es lineal con $P(x)=-2$ y $Q(x)=5$. Entonces

$\int Pdx=\int -2dx=-2x\Longrightarrow e^{\int Pdx}=e^{-2x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx}-2y=5$ por e^{-2x} nos queda

$$\frac{dy}{dx}e^{-2x}-2ye^{-2x}=5\,e^{-2x}\Longrightarrow\frac{d}{dx}(ye^{-2x})\Longrightarrow 5\,e^{-2x}\Longrightarrow\int\frac{d}{dx}(ye^{-2x})dx=\int 5\,e^{-2x}dx\Longrightarrow$$

$$ye^{-2x}=-\frac{5}{2}e^{-2x}+c\;\Longrightarrow y=\frac{-\frac{5}{3}e^{-2x}}{e^{-2x}}+\frac{c}{e^{-2x}}\;\Longrightarrow y=ce^{2x}-\frac{5}{2}$$

Advierta que uno bien puede aplicar la fórmula

$$y=e^{-\int Pdx}(\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c\,)$$

para resolver la ecuación diferencial dada; sin embargo, si observa la solución del ejemplo anterior, es más práctico llevar a cabo la forma como se dedujo dicha solución, es decir, multiplicar por $e^{\int Pdx}$ e integrar la parte derecha de la ecuación.

Ejemplo 12. Resolver la ecuación diferencial lineal[5] de primer orden $xy' + y = x^2 cosx$.

Busquemos la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. Dividiendo la ecuación propuesta por x $\Longrightarrow$

$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx}' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}x^2cosx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = (\frac{1}{x})x^2cosx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = xcosx$.

Nos quedó entonces $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = xcosx$.

Entonces $\int Pdx = \int \frac{1}{x}dx = lnx \Longrightarrow e^{\int Pdx} = e^{lnx} = x$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = xcosx$ por x nos queda

$$\frac{dy}{dx}\cdot x + x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)y = x(xcosx) \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} + y = x^2cosx \Longrightarrow$$

$$xdy + ydx = x^2cosx\,dx \Longrightarrow d(xy) = x^2cosx\,dx \Longrightarrow \int d(xy) = \int x^2cosx\,dx \Longrightarrow$$

$$xy = \int x^2cosx\,dx \Longrightarrow xy = x^2sinx + 2xcosx - 2sinx + c \Longrightarrow$$

$$y = xsinx + 2cosx - 2x^{-1}sinx + cx^{-1}$$

Quizá sea prudente recordar que la solución[6] de $\int x^2cosx\,dx$ se realiza por repetición del método de integración por partes.

A estas alturas del curso, usted ya debe suponer que algunas ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden resolver por diferentes métodos. En el ejemplo siguiente vamos a resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y + 4$ por dos de los métodos vistos: ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones diferenciales exactas con factor integrante.

---

[5] Ejercicio número 13 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[6] Sea u–x2⟹du–2xdx, dv–x⟹v–x⟹x2x dx– x2x 2xxdx.
Sea z–x⟹dz–dx, dw–x⟹w– x ⟹x2x dx– x2x 2xxdx–x2x 2[xx xdx⟹x2x dx–x2x+2xx 2x

Ejemplo 13. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y + 4$.

La ecuación $\frac{dy}{dx} - y = 4$ es lineal con $P(x) = -1$ y $Q(x) = 4$. Entonces $\int Pdx = -1dx = -x \Longrightarrow e^{\int Pdx} = e^{-x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} - y = 4$ por e^{-x} nos queda $\frac{dy}{dx}e^{-x} - e^{-x}y = 4e^{-x} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = 4e^{-x}$.

Integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$$ye^{-x} = -4e^{-x} + c \Longrightarrow y = ce^{x} - 4.$$

Ahora analicemos otro camino de solución de $\frac{dy}{dx} = y + 4$, el método de las ecuaciones diferenciales exactas.

Escribamos $\frac{dy}{dx} = y + 4$ de la forma $Mdy + Ndx$, es decir $(y + 4)dx + (-1)dy = 0$, con $M = y + 4$, y $N = -1$. Esta ecuación no es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\,y+4)}{\partial y} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-1)}{\partial x} = 0.$$

Como la ecuación no es exacta, procedemos a encontrar un factor integrante de la forma

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces el factor integrante es

$$H(x, y) = e^{\int g(y)dy}$$

Busquémoslo:

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y+4}(0-1) = -\frac{1}{y+4} \Longrightarrow H(x, y) = g(y) = e^{-\int \frac{dy}{y+4}} = \frac{1}{y+4}$$

El factor integrante es entonces $g(y) = \frac{1}{y+4}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$. Así:

$$\frac{1}{y+4}(y+4)dx + \frac{1}{y+4}(-1)dy = 0 \Longrightarrow (1)dx - \frac{1}{y+4}dy = 0$$

Verifiquemos que la nueva ecuación $(1)dx - \frac{1}{y+4}dy = 0$ es exacta con $M = 1,$ y

$N = -\frac{1}{y+4} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-\frac{1}{y+4})}{\partial x} = 0.$

Para resolver $\Longrightarrow dx - \frac{1}{y+4}dy$ sigamos los 5 pasos en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M \Longrightarrow f = \int M dx + g(y) \Longrightarrow f = \int 1dx + g(y) \Longrightarrow$ $f = x + g(y)$. Derivar parcialmente f con respecto a y, es decir, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x)}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = +\frac{dg}{dy}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Longrightarrow +\frac{dg}{dy} = -\frac{1}{y+4}$. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función $g \Longrightarrow g = -\int \frac{dy}{y+4} = -ln(y+4) = ln(y+4)^{-1} = ln\frac{1}{y+4}$.

Y la solución es

$$\int M dx + g(y) = c.$$

Es decir,

$$c = x + ln\frac{1}{y+4}$$

Entonces hemos resuelto la ecuación $\frac{dy}{dx} = y + 4$.

Vista como ecuación diferencial lineal se obtuvo la solución $y = ce^x - 4$.

Vista por el método de ecuaciones diferenciales exactas mediante el método del factor

integrante, se obtuvo la solución $c = x + ln\frac{1}{y+4}$.

Aparentemente usted advertirá que las soluciones son diferentes, pero

$$c = x + ln\frac{1}{y+4} \Longrightarrow c - x = ln\frac{1}{y+4} \Longrightarrow e^{c-x} = e^{ln\frac{1}{y+4}} = \frac{1}{y+4} \Longrightarrow$$

$$y + 4 = \frac{1}{e^c e^{-x}} = ce^x \Longrightarrow y = ce^x - 4 .$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 80 a 90.

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales: cicuitos en serie

Circuito en serie LR (Figura 2).

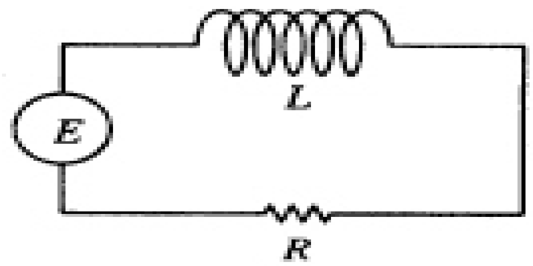

Figura 2. Circuito en serie LR

Fuente: https://es.slideshare.net/JimenaRodriguezH/clase 06 aplicaciones de ecuaciones diferenciales

En un circuito en serie muy simple como el de la figura, dotado de un resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor, más la caída de voltaje a través del resistor es igual al voltaje aplicado al circuito.

En un circuito, L se define como la Inductancia y R es la resistencia del circuito; ambos, L y R son valores constantes. La corriente $i(t)$ se denomina la respuesta del sistema.

Instrucción

Le invitamos a realizar la segunda parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Si representamos la caída de voltaje a través del inductor por $L\left(\frac{di}{dt}\right)$, la la caída de voltaje a través del resistor por Ri y el voltaje aplicado al circuito por $E(t)$, entonces la segunda ley de Kirchhoff para determinar la corriente en el circuito en serie LR en cualquier instante se puede escribir mediante la ecuación diferencial.

$$L\left(\frac{di}{dt}\right) + Ri = E(t)$$

En un circuito, L se define como la Inductancia y R es la resistencia del circuito; ambos, L y R son valores constantes.

Circuito en serie RC (Figura 3).

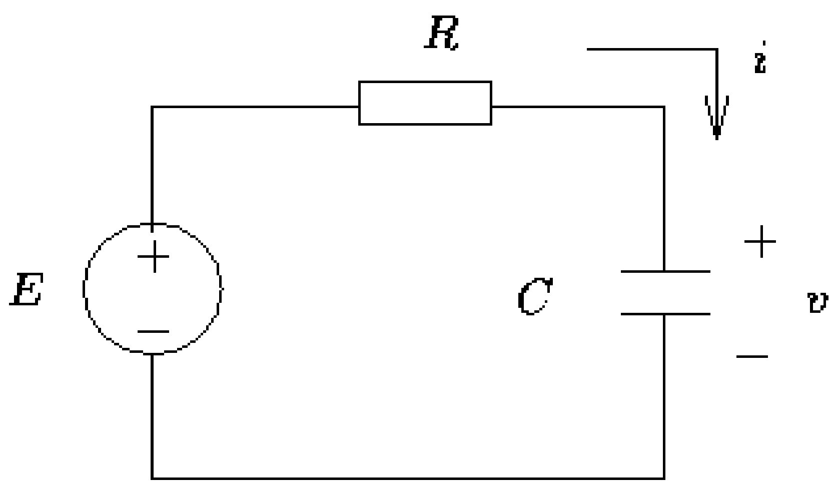

Figura 3. Circuito en serie RC.

Fuente. http://elluishinojos.blogspot.com.co/2015/04/circuitos rc y constante de tiempo.html

La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es $\frac{q(t)}{C}$ donde q es la carga del capacitor. Al aplicar nuevamente la segunda ley de Kirchhoff

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

La corriente i y la carga q se relacionan mediante la expresión $i = \frac{dq}{dt}$ entonces para determinar la corriente en el circuito en serie RC en cualquier instante nos queda la ecuación diferencial

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Ejemplo 14. Circuito en serie[5].

Una batería de 12 voltios se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i si la corriente inicial es cero.

Sabemos que la ecuación diferencial para este circuito es

$$L\left(\frac{di}{dt}\right) + Ri = E(t)$$

Como $L = \frac{1}{2}$, $R = 10$, y $E = 12$, nos queda

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12 \quad \text{con la condición inicial} \quad i(0) = 0.$$

Multiplicando la ecuación $\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12$ por 2 nos queda

$$\frac{di}{dt} + 20i = 24.$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = 20$ y $Q(x) = 24$. Entonces $\int Pdt = \int 20dt = 20t \Longrightarrow e^{\int Pdt} = \mathrm{e}^{20t}$.

Al multiplicar cada término de $\frac{di}{dt} + 20i = 24$ por e^{20t} nos queda $\frac{di}{dt}e^{20t} + 20ie^{20t} = 24\,e^{20t} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(ie^{20t}) \Longrightarrow 24\,e^{20t} \Longrightarrow$

$$\int \frac{d}{dt}(e^{20t} \cdot i) = 24\int e^{20t}dt \Longrightarrow$$

$$e^{20t} \cdot i = 24 \cdot \frac{1}{20}e^{20t} + c \Longrightarrow i = \frac{\frac{6}{5}e^{20t}}{e^{20t}} + \frac{c}{e^{20t}} \Longrightarrow i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}.$$

[5] Ejemplo 6 del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, p.88.

Como $i(0) = 0$, debemos encontrar el valor de la constante de integración c, entonces

$i = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \Rightarrow 0 = \frac{6}{5} + ce^{-20(0)}$, de donde $c = -\frac{6}{5}$, luego la expresión que permite determinar la corriente en el circuito en cualquier instante es

$$i = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ con $n \epsilon R$, se llama ecuación diferencial de Bernoulli. Advierta que si $n = 0$, o $n = 1$ la ecuación diferencial de Bernoulli se transforma en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Sospechará usted que la ecuación diferencial de Bernoulli se puede transformar en una ecuación diferencial lineal de primer orden. Efectivamente esto se logra mediante la sustitución

$$v = y^{1-n}$$

Que transforma la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ en una ecuación diferencial lineal donde la función que se debe encontrar es $v(x)$.

Ejemplo 15. Resolver la ecuación diferencial $y' - xy^2 + xy = 0$.

Organizando los términos de la ecuación nos queda con la forma de la ecuación diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

Con $n = 2$, $P(x) = x$ y $Q(x) = x$. Haciendo la sustitución sugerida nos queda

$$v = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Entonces la ecuación $\frac{dy}{dx}+xy=xy^2$ se transforma en $-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}+x\cdot\left(\frac{1}{v}\right)=x\cdot\left(\frac{1}{v^2}\right) \Longrightarrow$ $\frac{dv}{dx}-xv=-x$ que claramente es lineal con variable dependiente v, variable independiente x, $P(x)=-x$ y $Q(x)=-x$.

Entonces $\int Pdx=\int -xdx=-\frac{x^2}{2} \Longrightarrow e^{\int Pdx}=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx}+(\frac{1}{x})y=xcosx$ por x nos queda

$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dv}{dx}-xe^{-\frac{x^2}{2}}v=-xe^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(ve^{-\frac{x^2}{2}}\right)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$, integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$$ze^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}+c \Longrightarrow z(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}}+ce^{\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow z(x)=1+ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Devolviéndonos a la sustitución $y=\frac{1}{v}$, la solución es $y=\frac{1}{1+ce^{\frac{x^2}{2}}}$.

Ejemplo 16. Resolver la ecuación diferencial[4] $(xy^2+y)dx+xdy=0$

Busquemos la forma de la ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$.

$$(xy^2+y)dx+xdy=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{xy^2+y}{-x}=\frac{xy^2}{-x}+\frac{y}{-x}=-y^2-\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=-y^2$$

$$\text{Sea } u=y^{1-n} \Longrightarrow u=y^{1-2}=y^{-1} \Longrightarrow u=\frac{1}{y} \Longrightarrow \frac{du}{dy}=-\frac{1}{y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{du}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=1 \Longrightarrow \frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=1.$ Esta ecuación es lineal con $P(x)=-\frac{1}{x}$ y $Q(x)=1$.

Entonces $\int Pdx=\int -\frac{1}{x}dx=lnx^{-1}=ln\frac{1}{x} \Longrightarrow e^{\int Pdx}=e^{ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{du}{dx}-\cdot\frac{1}{x}u=1$ por $\frac{1}{x}$ nos queda

[4] Ejercicio número 34 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}u=\frac{1}{x}\ \Longrightarrow \frac{1}{x}du-\frac{1}{x^2}udx=\frac{1}{x}dx\ \ \Longrightarrow\ \frac{xdu-udx}{x^2}=\frac{1}{x}dx\ \Longrightarrow$$

$d\left(\frac{u}{x}\right)=\frac{1}{x}dx$, integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$$\frac{u}{x}=lnx+c\ \Longrightarrow \frac{y^{-1}}{x}=lnx+c\ \Longrightarrow lnx-\frac{1}{xy}=c.$$

Ejemplo 17. Resolver la ecuación diferencial, corresponde al ejercicio 44 (Simmons, 2007, p.79): $xy' + y = y^2lnx$

Busquemos la forma de la ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$. Al dividir la ecuación por x y por $-\frac{1}{y^2}$ nos queda

$$\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{lnx}{x}$$

$$\text{Sea } u=y^{1-n}\Longrightarrow u=y^{1-2}\Longrightarrow u=y^{-1}\Longrightarrow \frac{du}{dy}=-\frac{1}{y^2}.$$

Como $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}\Longrightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$, reemplazando en $(-\frac{1}{y^2})\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=lnx \Longrightarrow$ $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{lnx}{x}\Longrightarrow \frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-\frac{lnx}{x}$, lineal con $P(x)=-\frac{1}{x}$ y $Q(x)=-\frac{lnx}{x}$.

Entonces $\int Pdx=\int -\frac{1}{x}dx=-lnx=\ln x^{-1}=ln\frac{1}{x}\Longrightarrow e^{ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-\frac{lnx}{x}$ por $\frac{1}{x}$ nos queda

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}u=\frac{1}{x}\cdot-\frac{lnx}{x}\ \Longrightarrow \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}-\cdot\frac{1}{x^2}u=-\frac{lnx}{x^2}\Longrightarrow$$

$$\frac{xdu-udx}{x^2}=-\frac{lnx}{x^2}\Longrightarrow d\left(\frac{u}{x}\right)=-\frac{lnx}{x^2}dx\Longrightarrow$$

$$\int d\left(\frac{u}{x}\right)=-\int\frac{lnx}{x^2}dx$$

Integrando[7] a ambos lados de la última ecuación se obtiene $\frac{u}{x}=\frac{lnx}{x}+\frac{1}{x}+c\ \Longrightarrow u=$ $lnx+cx+1\Longrightarrow \frac{1}{y}=lnx+cx+1$

---

[7] Usando el método de integración por partes, resolvamos la integral xx2dx–x 2xdx. Sean w–x y dv–x 2dx⟹dw–1xdx y v– 1x , entonces x 2xdx–(lnx) 1x 1x1xdx⟹x 2xdx– xx+x 2dx– xx 1x+c.

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden: Cables suspendidos

(Aplicación adaptada del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Dennis Zill, p.25.)

Existen muchas construcciones que utilizan cables suspendidos como el cable de suspensión de un puente (Figura 4) o los alambres de teléfonos (Figura 5). Pensemos en un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales.

Figura 4. Cable de suspensión de un puente.
Fuente: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

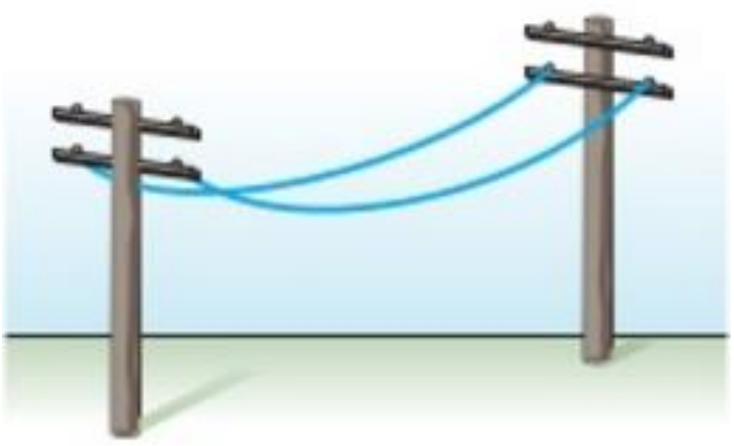

Figura 5. Alambres de teléfonos.
Fuente: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

Podemos construir un modelo matemático que se describe por medio de una ecuación diferencial de primer orden para describir la forma que tiene el cable (Figura 6).

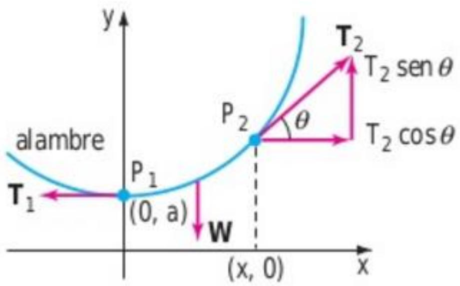

Figura 6. Elemento del cable.
Fuente. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

Examinemos un trozo del cable que comprende entre el punto más bajo P_1 y otro punto tomado de manera arbitraria P_2. Este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenadas rectangulares eligiendo al eje y para que pase a través de P_1 y eligiendo al eje x para que pase a a unidades debajo de P_1.

Analizando las fuerzas que actúan sobre el cable tenemos:

Las fuerzas de tensión (vectores), T_1, T_2 en el cable que son tangentes al cable en P_1 y P_2 respectivamente.

La parte W de la carga total vertical entre los puntos P_1 y P_2.

Nos interesan las magnitudes de estos vectores:

$$T_1 = |\,T_1|\,, T_2 = |\,T_2| \text{ y } W = |\,W|.$$

Las componentes horizontal y vertical de la fuerza de tensión T_2 son

$T_2 cos\theta$ y $T_2 sin\theta$. Usando el concepto físico del equilibrio estático para el cable tenemos

$$T_1 = T_2 cos\theta \quad \text{y} \quad W = T_2 sin\theta$$

Al dividir término a término estas expresiones,

$$\frac{W = T_2 sin\theta}{T_1 = T_2 cos\theta} = \frac{W}{T_1} = \frac{sin\theta}{cos\theta} = tan\theta \Longrightarrow \frac{W}{T_1} = tan\theta. \text{ Como } \frac{dy}{dx} = tan\theta \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}$$

Introducción a las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Reducción del orden

Aunque en este módulo el análisis de las ecuaciones diferenciales de segundo orden es el propósito de la siguiente unidad, existen dos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se pueden resolver por métodos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ausencia de la variable dependiente.

Sabemos que la forma general de una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma

$$F(x, y, y', y'').$$

Si y no aparece de manera explícita, esta ecuación puede escribirse

$$F(x,\ y',\ y'').$$

Para reducir su orden, es decir, transformarla en una ecuación diferencial de primer orden, introducimos una nueva variable dependiente, por ejemplo p, haciendo

$$p = y' \text{ y } \frac{dp}{dx} = y''$$

La nueva ecuación diferencial de primer grado nos queda

$$f(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}).$$

En la resolución de esta ecuación, simplemente se reemplaza la variable p por $\frac{dy}{dx}$ y se resuelve lo que aparezca, es decir, dos ecuaciones diferenciales de primer orden de manera sucesiva.

Ejemplo 18. Resolver la ecuación diferencial[8] $(1+x^2)y'' + xy' = 0$.
Esta ecuación es diferencial de segundo orden. Se trata entonces de reducir su orden mediante las sustituciones
$p = y'$ y $\frac{dp}{dx} = y''$. Reemplazando en $(1+x^2)y'' + xy' = 0$, nos queda $(1+x^2)\frac{dp}{dx} + xp = 0$ que podemos transformar en separable[9]

$$\Longrightarrow (1+x^2)\frac{dp}{dx} = -xp \Longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{x}{1+x^2} \Longrightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{x}{1+x^2}dx \Longrightarrow$$

$$lnp = -\frac{1}{2}ln(1+x^2) + lnc \Longrightarrow lnp = ln\frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{e}^{lnp} = e^{ln\frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow y' = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \frac{dy}{c} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{c}\int dy = \int \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \Longrightarrow \frac{y}{c} = ln((1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x) + c_2$$

$$y = c[ln((1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x)] + c_3.$$

El siguiente ejemplo es muy interesante porque se parte de una ecuación diferencial de segundo orden que se reduce a una ecuación diferencial de Bernoulli de primer orden y finalmente en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejemplo 19. Resuelva la ecuación diferencial $x^2y'' = y'(3x - 2y')$.

Esta ecuación es diferencial de segundo orden. Se trata entonces de reducir su orden mediante las sustituciones
$p = y'$ y $\frac{dp}{dx} = y''$. Reemplazando en $x^2y'' = y'(3x - 2y')$, nos queda
$x^2\frac{dp}{dx} = p(3x - 2p) \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{3p}{x} - \frac{2p^2}{x^2} \Longrightarrow \frac{dp}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)p = \left(\frac{-2}{x^2}\right)p^2$ que es una ecuación diferencial de Bernoulli.

---

[8] Ejercicio número 23 de la sección de ejercicios propuestos del capitulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[9] Resolvamos la integral dx1+x212 por el método de sustitución trigonométrica. Sea x–θ ⟹dx–2 ⟹ dx1+x212– 2dθ ⟹dx1+x212– θdθ– θ++c2–(1+x212+x)+c2 .

Sea $u = p^{1-n} \Rightarrow u = p^{1-2} = p^{-1}$, de donde

$\frac{du}{dp} = -\frac{1}{p^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{du}{dp}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$, entonces volviendo a la ecuación de Bernoulli, dividiendo por $-p^2$, y haciendo las sustituciones propuestas

$$\frac{dp}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)p = \left(\frac{-2}{x^2}\right)p^2 \Rightarrow -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\left(-\frac{3}{x}\right)p = \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)p^{-1} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)u = \frac{2}{x^2},$$

que es una ecuación diferencial lineal con $P(x) = \frac{3}{x}$ y $Q(x) = \frac{2}{x^2}$.

Al multiplicarla por el factor x^3 nos queda

$$x^3 \cdot \frac{du}{dx} + x^3 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)u = x^3 \cdot \frac{2}{x^2} \Rightarrow x^3\frac{du}{dx} + 3x^2u = 2x \Rightarrow x^3du + 3x^2udx = 2xdx \Rightarrow$$

$$d(x^3 \cdot u) = 2xdx \Rightarrow \int \mathrm{v}d(x^3 \cdot u) = 2\int xdx \Rightarrow x^3 \cdot u = x^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$p^{-1}x^3 = x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{x^3}{p} = x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{x^3}{y'} = x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{x^2+c_1}. \int dy = \int \frac{x^3}{x^2+c_1}dx \Rightarrow y =$$

$\int \frac{x^3}{x^2+c_1}dx$, resolviendo la integral de la derecha[10] nos queda

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{c}{2}ln(x^2 + c) + c_2.$$

Ausencia de la variable independiente.

Cuando la variable independiente x no está presente de manera explícita la ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'')$ se convierte en

$g(y, y', y'') = 0.$

De manera similar al proceso anterior, introducimos la nueva variable dependiente p expresando la segunda derivada, y'' , en términos de la derivada de p con respecto a y:

$$p = y' \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

[10] Solución de x3x2+cdx. x3x2+cdx–x3+cx cxx2+cdx–x3+cxx2+cdx cxx2+cdx. Resolvemos cada integral por separado: x3+cxx2+cdx–x(x2+c)x2+cdx–xdx–x22. cxx2+cdx. Sea z–x2+c⇒dz–2xdx⇒dx–dz2x⇒cxx2+cdx–cxzdz2x–c2dzz⇒c2dzz–c2z+c2⇒cxx2+cdx–c2x2+c)+c2.

Luego $g(y, y', y'') = 0$, se puede escribir como

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Y otra vez se trata de resolver dos ecuaciones diferenciales de primer orden de manera sucesiva.

Ejemplo 20. Resolver la ecuación diferencial $yy'' = (y')^2$.

Sea $p = y' \implies y'' = p\frac{dp}{dy}$. entonces $yy'' = (y')^2$ se transforma en

$$y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2 \implies \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \implies \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \implies lnp = lny + c \implies e^{lnp} = e^{lny+c} \implies$$

$$p = e^{lny}e^{c} = c_1 y \implies \frac{dy}{dx} = c_1 y \implies \frac{dy}{y} = c_1 dx \implies \int \frac{dy}{y} = c_1 \int dx \implies lny = c_1 x + c_2$$

$$e^{lny} = e^{c_1 x + c_2} \implies y = e^{c_1 x}e^{c_2} \implies y = c_3 e^{c_1 x}.$$

Instrucción

Para finalizar, le invitamos a revisar un resumen de los conceptos de ecuaciones diferenciales tratados hasta ahora en el recurso de aprendizaje videoresumen.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, D., Álvarez, L., y Calzada, D. (2010). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos.*

Bargueño, F., y Alonso, D. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales: con introducciones teóricas.*

Blanes, Z., Ginestar, P., y Roselló, F. (2014). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.* Segunda. edición

Bobadilla, A., y Labarca, B. (2014). *Cálculo en una variable.*

Caicedo, A., y García, J. (2010). *Métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Camacho, A. (2010). *Cálculo diferencial.*

Castro, F. (2010). *Estabilidad: de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones funcionales: con sus aplicaciones.*

García, H. (2014). *Ecuaciones diferenciales.*

________. (2014). *Cálculo de varias variables.*

García, H., y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión.*

Guerrero, T. (2014). *Cálculo diferencial: serie universitaria patria.*

Index Mundi. (2017). *Colombia Tasa de crecimiento.*

López, M., y Acero, I. (2009). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas.* Segunda. Edición

Mesa, F. (2012). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción.*

Mombo, K. (2015). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias: una estrategia didáctica con integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el instituto superior de ciencias de la educación de Cabinda.*

Ortiz, C. (2014). *Cálculo diferencial.*

Ortiz, C., Ortiz, J., y Ortiz, F. (2015). *Cálculo diferencial.* Segunda. edición

Pagola, M., y López, G. (2017). *Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva.* Segunda. edición

BIBLIOGRAFÍA

Rivera, F. (2014). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias.*

Reyes, G. (2012). *Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas.*

Simmons, G. (2007). *Ecuaciones diferenciales*. Teoría, técnica y práctica. McGraw Hill.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr

San José, Costa Rica