MODELACIÓN MATEMÁTICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

AUTOR: LUIS GUILLERMO CARO PINEDA

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El módulo de ecuaciones diferenciales pretende desarrollar en los estudiantes de la Fundación Universitaria del Área Andina aptitudes y actitudes que le permitan formarse como un profesional, íntegro y responsable por medio de la formación en Matemáticas para el desarrollo de sus conocimientos en cursos posteriores y cursos propios de su saber específico. Así mismo, proporciona al estudiante (investigador) y al profesional, herramientas que le faciliten analizar datos en las situaciones problema de su entorno y proponer soluciones acertadas. A través del seguimiento y desarrollo de las actividades propuestas en el módulo, el estudiante obtendrá habilidades y destrezas que le permitirán, mediante el razonamiento, el análisis y la reflexión, interpretar diversos modelos matemáticos, términos analíticos y gráficos, y proponer y plantear problemas prácticos y teóricos relacionados con su profesión.

De acuerdo con nuestros propósitos formativos, la pregunta que orienta el aprendizaje para el módulo de Ecuaciones diferenciales es: **¿Cómo modelar fenómenos científicos, sociales y económicos, por medio de métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden?**

En el referente de pensamiento para el eje 1 se define con precisión una ecuación diferencial ordinaria, su grado, orden y linealidad; se identifican las ecuaciones diferenciales de primer orden, segundo orden y de orden superior. Así mismo, se precisa si cierta función es solución de una ecuación diferencial y en qué condiciones es una solución particular o general, así como las formas explícitas e implícitas en que se pueden presentar dichas soluciones. Veremos problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial pero sujeta a unas condiciones que se han establecido previamente, es decir, proponen un valor inicial para la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) o sus derivadas sucesivas.

Comenzando el estudio de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, aprenderemos las soluciones de las ecuaciones separables, luego revisamos los métodos para resolver ecuaciones que se pueden convertir en separables, las ecuaciones homogéneas y aquellas que se pueden transformar en homogéneas.

El referente termina con una revisión exhaustiva de dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden: ley de enfriamiento de Newton y crecimiento poblacional.

En el eje de pensamiento 1, Conceptualicemos, formulamos la pregunta: **¿De qué manera las ecuaciones diferenciales de primer orden, separables y homogéneas, nos permiten modelar fenómenos que involucran problemas de crecimiento y decrecimiento?**

Introducción a las ecuaciones diferenciales, conceptos básicos y algunas soluciones básicas de ED de primer orden

Modelación matemática con ecuaciones diferenciales

A diferencia de lo que posiblemente creemos, muchos aspectos de la cotidianidad se relacionan con las ecuaciones diferenciales, y sus aplicaciones en el mundo físico que vivimos son muy amplias, de tal suerte que a través de la evolución de las ciencias físicas su aparición y desarrollo han permitido modelar, entre otros, un número considerable de fenómenos en disciplinas como la economía, la biología, la química, y la astronomía, siendo por supuesto la Física una de las disciplinas que quizá aportó más conceptos y nociones para su desarrollo.

Observemos de manera muy general unas pocas situaciones que se modelan a través de ecuaciones diferenciales; la ampliación de éstas y la aparición de otras, serán ampliadas a lo largo del módulo.

En general podemos considerar que la población mundial está creciendo a un ritmo acelerado ya que cada vez hay más personas y menos recursos alimenticios y energéticos para hacerla sostenible. Aún más, supongamos que dicho crecimiento es exponencial y claramente el aumento de personas en cierta ciudad es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera; Este es un problema típico que relaciona una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP \ (1),$$

Cuya solución es:

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

En geología y arqueología interesan las ideas que tratan sobre desintegración radiactiva; los elementos radiactivos que se encuentran en la tierra pueden usarse para ubicarnos en el tiempo sucesos que ocurrieron hace millones de años y la ecuación diferencial que resulta de las consideraciones pertinentes es:

$$-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0 \ (2).$$

(Simmons, 2007, p. 20.)

Aunque todos nosotros realizamos transacciones financieras a diario, no todos sabemos que cuando depositamos cierto capital C en una cuenta bancaria que rinde una tasa compuesta cada cierto tiempo t, digamos anualmente, este capital crece exponencialmente y el modelo matemático que expresa esta variación está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dA/A}{dt} = k \ (3),$$

donde A representa el capital acumulado después de t años y k muestra el cambio relativo de A por unidad de tiempo t.

Instrucción

Antes de continuar, le invitamos a revisar los contenidos y la relación entre los diferentes ejes temáticos revise el mapa conceptual.

En economía pueden interesar por ejemplo las preferencias de consumo que van ligadas al precio de un artículo en algún momento, este precio está determinado por la condición de que, en cierto instante, cierta función de variable real llamada función de oferta sea igual a otra función de variable real llamada función de demanda; este equilibrio, llamado principio económico de la oferta y la demanda resulta en una ecuación diferencial de primer orden. Así mismo, se pueden abordar la aplicación de los modelos de Maclaurin-Taylor y de ecuaciones diferenciales en la dirección y gestión de unidades de producción. (Reyes, 2012).

La Física es la disciplina donde sin lugar a dudas aparecen con mayor firmeza las ecuaciones diferenciales. Algunos ejemplos se relacionan con caída de cuerpos y variados problemas de movimiento como el pendular y el tiro parabólico; la ley de la gravitación de Newton, los períodos de revolución de los planetas y la tercera ley de Kepler; circuitos eléctricos simples, vibraciones en sistemas mecánicos y eléctricos, y osciladores armónicos acoplados; problemas clásicos como el de encontrar la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga por la acción de su peso (cadena colgante) o el problema de la braquistócrona.

En gran variedad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que veremos durante todo el curso aparecen con mucha las funciones exponenciales, mostrando cierto crecimiento o decrecimiento (decaimiento) que experimentan las variables involucradas; en estas aplicaciones generalmente la variable independiente es el tiempo, t. La figura 1 muestra el comportamiento de la función exponencial cuando la función crece, es decir, donde la constante $k > 0$, y cuando la función decrece, es decir, donde la constante $k < 0$.

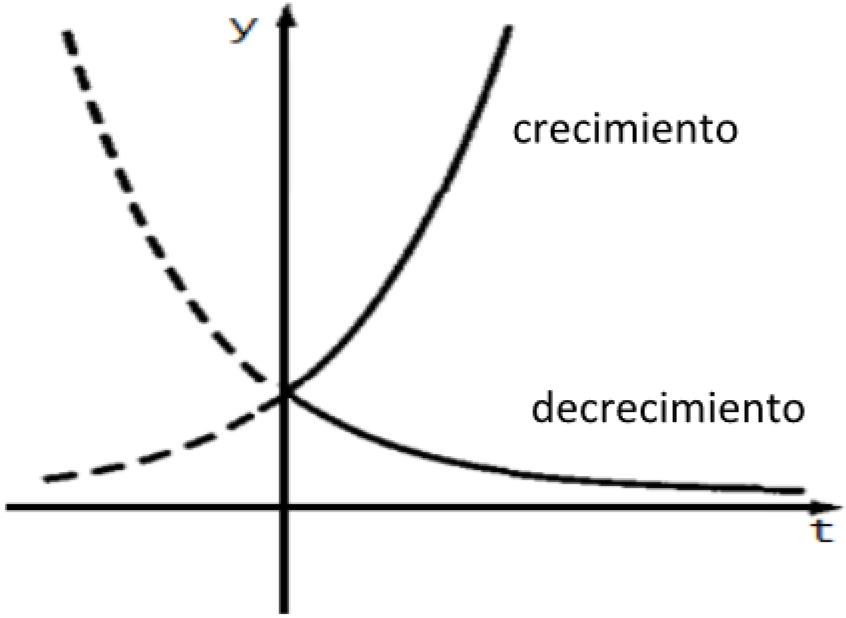

Figura 1. Crecimiento y decrecimiento
Fuente: propia

Aunque en el recorrido que haremos por una parte importante del universo de las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecerán muchas aplicaciones y muchas formas de modelar situaciones y fenómenos en varias disciplinas, el propósito principal del curso tiene relación directa con la modelación y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en ingeniería.

Definición de una ecuación diferencial

En términos generales una ecuación es una igualdad de dos expresiones, no importa su "longitud", que se caracterizan porque ambas o alguna de ellas tienen una o más incógnitas; éstas representan o esconden el valor de "algo" que debe ser encontrado, si se puede. Al reemplazar cierto valor o ciertos valores en la incógnita- generalmente números reales, funciones de variable real, vectores, matrices- la igualdad puede o no darse. Cuando se reemplaza un valor o varios valores que verifican la igualdad al realizar las operaciones indicadas, se dice que este valor o estos valores son el conjunto solución o las soluciones de la igualdad. Aunque estamos acostumbrados a resolver ecuaciones de tipo algebraico donde las soluciones son números reales, debemos advertir que la solución o soluciones de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones.

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes:

$$F(x, y', \cdots, y^n) = 0.$$

Para los propósitos del presente módulo fijamos nuestra atención en las ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales que relacionan una función, una sola variable independiente y las derivadas con respecto a esa variable independiente, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x - 1, \text{o } y'' + y' = x - 1.$$

Observe que es la misma ecuación diferencial escrita con dos notaciones diferentes. Quizá el uso diferenciado de alguna de ellas se deba a su aparición histórica en alguna de las aplicaciones que veremos, pero para nuestro uso podemos utilizar cualquiera de ellas.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son:

$$xy''' + 2x^2y' = xy \ (4)$$

$$y' = x^2 \ (5)$$

$$(y'')^3 - 4xy' = x^2 \ (6)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^3 \ (7)$$

$$(y^{(4)})^3 - 3x(y^{(3)})^2 = x^3y^2 \ (8)$$

$$-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0 \ (9)$$

Al lado de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existen las ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones en derivadas parciales, éstas tienen más de una variable independiente y las derivadas (parciales) se calculan con respecto a estas variables independientes. Aunque algunas de ellas aparecen en este módulo, solamente se referencian por su aparición en algunas aplicaciones.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 4\frac{\partial u}{\partial x} - u \ (10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \ (11)$$

Orden, grado y linealidad

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar según su tipo, orden y linealidad.

De acuerdo a su tipo, pueden ser ordinarias o parciales como vimos en la sección anterior.

Si en la definición de una ecuación diferencial, F es un polinomio, se define el grado de la ecuación diferencial como el grado de $y(x)$ y el de sus derivadas, es decir, el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella. Si este número no es natural, no se puede determinar el grado de la ecuación diferencial.

El orden de una ecuación diferencial se define como el orden de la derivada más alta que aparece en ella.

La ecuación diferencial $F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0$ se llama lineal si F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^n$. La forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n es

$$a_n(x)y^n + \ a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Estas se caracterizan porque son de grado 1 en la variable dependiente y y en todas sus derivadas, y todos los coeficientes

$$a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), a_0(x)$$

sólo dependen de x.

Identifiquemos estas características en las ecuaciones diferenciales (4) al (9).

$xy''' + 2x^2y' = xy$ es de grado 1 porque el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella es 1; es de tercer orden porque la derivada más alta que aparece es 3; es lineal porque todos sus coeficientes solo dependen de x, y es de grado 1 en y y todas sus derivadas.

$y' = x^2$ es de grado 1 porque el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella es 1; es de primer orden porque la derivada más alta que aparece es 1; es lineal porque todos sus coeficientes solo dependen de x, y es de grado 1 en y y todas sus derivadas.

Verifique que las otras ecuaciones diferenciales señaladas anteriormente cumplen las condiciones descritas:

$(y'')^3 - 4xy' = x^2$ es de grado 3, segundo orden y no lineal.

$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^3$ es de grado 1, tercer orden y lineal.

$(y^{(4)})^3 - 3x(y^{(3)})^2 = x^3y^2$ es de grado 3, cuarto orden y no lineal.

$-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0$ es de grado 1, primer orden y lineal.

Para las ecuaciones en derivadas parciales (10) y (11):

$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 4\frac{\partial u}{\partial x} - u$ es de grado 1, primer orden y lineal.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ es de grado 1, segundo orden y lineal.

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 2 a 7.

Instrucción

Realice la primera parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Soluciones generales y particulares de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial es hallar una función $y = f(x)$ definida en algún intervalo (a, b) y algunas de sus derivadas, $y', y'', \cdots, y^n$ que satisfacen la ecuación.

Más adelante, podemos demostrar que las funciones:

$$y = lnx \ (12) \text{ y } y = (x^2 - 1)^{-1} \ (13)$$

son soluciones respectivas de las ecuaciones diferenciales

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \ (14) \text{ y } \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \ (15).$$

¡Recomendación!

Puede revisar estas ideas y otros ejemplos en
http://personal.us.es/niejimjim/tema01.pdf

Sin embargo, en el caso de (12), comprobaremos que esta solución solamente existe en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que (13) satisface a (15) solamente en el intervalo $(-1,1)$. Si no advertimos otra cosa, suponemos que estos intervalos son conjuntos de números reales.

Existen formas diversas que se presentan al respecto de las soluciones de una ecuación diferencial, aunque en la gran mayoría de casos se presentan las soluciones infinitas que se pueden expresar mediante una expresión general.

La gran mayoría de ecuaciones diferenciales tiene un conjunto infinito de soluciones. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' - 14y = 0 \ (16),$$

que discutiremos en la siguiente sección, tiene como conjunto solución todas las funciones de variable real que se pueden escribir de la forma

$$y = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{7x} \ (17) \text{ , con } k_1, k_2 \text{ constantes.}$$

Soluciones como (17), que incluyen parámetros $k_1, k_2, \cdots, k_n$, se enmarcan dentro de la expresión

$$H(x, y, k_1, k_2, \cdots k_n) = 0 \ (18).$$

A la familia $n - paramétrica$ de funciones que define (18) la llamaremos solución general de la ecuación diferencial. Dicha solución general representa geométricamente una familia de curvas que se pueden graficar de manera muy fácil dando valores a los parámetros mediante el uso de algún "programa de Cálculo simbólico" como Geogebra, Derive. Matlab, etc.

Si por ejemplo de manera arbitraria en (17) reemplazamos $k_1 = 3$, y $k_2 = 2$, esta solución se convierte en $y = 3e^{-2x} + 2e^{7x}$; esta última función es una solución particular de la solución general.

Entonces, una solución particular de una ecuación diferencial es cualquier solución específica que hace parte de su conjunto solución; ésta se obtiene al dar valores específicos a todos los parámetros que aparecen en la solución general.

Algunas ecuaciones diferenciales no tienen solución en el conjunto de los números reales, por ejemplo $(\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$; y otras soluciones son únicas, esto ocurre con la ecuación diferencial $(\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = 0$, cuya única solución es $y = 0$.

Se denomina solución singular de una ecuación diferencial a una solución que no está incluida en la solución general. Aunque este tipo de soluciones no aparecen con frecuencia, revisaremos estas soluciones cuando estudiemos las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Soluciones explícitas e implícitas de una ecuación diferencial

Verificar si cierta función definida de manera explícita es solución de una ecuación diferencial es una tarea relativamente fácil si se tienen los conocimientos necesarios sobre derivación; sin embargo, existen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas de manera implícita, lo que implica que en algunas ocasiones sea muy difícil (o imposible) expresar la variable dependiente explícitamente en términos de la variable independiente.

Ejemplo 1. Soluciones explícitas. Las funciones:

$$y = e^{-2x} \ (19) \ , y = e^{7x} \ (20)$$

son ambas soluciones explícitas de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 5y' - 14y = 0 \ (21).$$

Y de manera más general, la función

$$y = k_1 e^{-2x} + \mathrm{k}_2 e^{7x} \ (22),$$

es igualmente una solución explícita para (21), sin importar qué valores asignemos a las constantes k_1 y k_2.

Verifiquemos que, efectivamente, (19), (20) y (22) verifican lo dicho.

De (19) sabemos que

$$y = e^{-2x}, y' = -2e^{-2x} \ , y'' = 4e^{2x} \ ,$$

al reemplazar los respectivos valores de y, y', y'' en (21) nos queda

$$y'' - 5y' - 14y = 4e^{-2x} - 5(-2e^{-2x}) - 14(e^{-2x}) = 4e^{2x} + 10e^{2x} - 14e^{2x} \ = 0,$$

y se verifica la igualdad.

De (20) sabemos que

$$y = e^{7x}, y' = 7e^{7x}, y'' = 49e^{7x},$$

al reemplazar los respectivos valores de y, y', y'' en (21) nos queda

$$y'' - 5y' - 14y = 49e^{7x} - 5(7e^{7x}) - 14(e^{7x}) = 49e^{7x} - 35e^{7x} - 14e^{7x} = 0,$$

y se verifica la igualdad.

De (22) sabemos que

$$y = k_1e^{-2x} + \; k_2e^{7x} \,, y' = -2k_1e^{-2x} + 7k_2e^{7x}, y'' = \; 4k_1e^{-2x} + 49k_2e^{7x}$$

al reemplazar los respectivos valores de y, y', y'' en (21) nos queda

$$y'' - 5y' - 14y = \; (4k_1e^{2x} + 49k_2e^{7x}) - 5(-2k_1e^{-2x} + 7k_2e^{7x}) - 14(k_1e^{-2x} + \; k_2e^{7x}) =$$

$$4k_1e^{-2x} + 49k_2e^{7x} + 10k_1e^{-2x} - 35k_2e^{7x} - 14k_1e^{-2x} - 14k_2e^{7x} = 0,$$

y se verifica la igualdad. Así hemos comprobado que las tres funciones (19), (20) y (22) son soluciones de la ecuación diferencial (21).

Aunque posiblemente ya lo advirtió, al encontrar la solución de una ecuación diferencial es necesario especificar cómo están definidas las funciones que componen su conjunto solución, es decir, especificar en qué intervalo o intervalos están definidas; en otras palabras, la solución de una ecuación diferencial

Ahora revisemos en los ejemplos 2 y 3 funciones que están expresadas de manera implícita y son solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo 2. Soluciones implícitas. Dada la función

$$x^3y^4 = 1 + xy^4cosx \; (23),$$

verifiquemos que es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-3x^2 + xsinx - cosx}{4(x^3 - xcosx)} \; (24)$$

Solución. Al contrario del procedimiento anterior, en este caso no podemos encontrar y' de manera inmediata al calcular la derivada de y porque simplemente y no aparece de manera explícita, es decir, está definida de manera implícita. En (23) dejemos solamente el 1 en el segundo miembro de la igualdad y factoricemos y^4:

$$y^4(x^3 - xcosx) = 1,$$

Dejamos y^4 a la izquierda de la igualdad y derivemos:

$$y^4 = \frac{1}{(x^3 - xcosx)} \Longrightarrow 4y^3 \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - [x(-sinx) + cosx]}{(x^3 - xcosx)^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + x(sinx) - cosx}{4(x^3 - xcosx)^2 y^3},$$

Multiplicando el segundo miembro por $\frac{y}{y}$, y reemplazando y^4 nos queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[-3x^2 + x(sinx) - cosx]y}{4(x^3 - xcosx)^2 y^4} = \frac{[-3x^2 + x(sinx) - cosx]y}{4(x^3 - xcosx)^2 \left[\frac{1}{(x^3 - xcosx)}\right]} = \frac{[-3x^2 + x(sinx) - cosx]y}{4(x^3 - xcosx)}.$$

Entonces hemos mostrado que (23) es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-3x^2 + xsinx - cosx}{4(x^3 - xcosx)}.$$

Ejemplo 3. Soluciones implícitas. Utilizando derivación implícita verifiquemos que las funciones definidas de manera implícita por la ecuación (Una relación Fx, y=0 es solución de una ecuación diferencial si define una o más soluciones explícitas):

$$4xy + 2x^3y^2 = 5 \ (25),$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{4y + 12x^2y^2}{4x + 4x^3y} \ (26).$$

Solución. Usando reglas elementales de derivación para derivar (24) con respecto a x tenemos

$$(4xy' + 4y) + 2[x^3 2yy' + 6x^2y^2] = 0 \ \Longrightarrow (4xy' + 4x^3yy') + 4y + 12x^2y^2 \ \Longrightarrow$$

$$y' = -\frac{4y + 12x^2y^2}{4x + 4x^3y}.$$

Ejemplo 4. Soluciones implícitas con diferenciales. Probemos que la función

$$\frac{x^3 - y^2}{2} + x + 4y = k \ (27)$$

define de manera implícita la solución general de la ecuación diferencial

$$(\tfrac{3}{2}x^2 + 1)dx - (2y - 4)dy = 0 \ (28).$$

Solución. Recuerde de sus cursos de Cálculo que si $f(x)$ es una función derivable, la diferencial de $f(x)$, representada por dy, se define como $dy = f'(x)dx$; ésta es una cantidad infinitesimal mientras que su derivada es una cantidad finita que resulta del cociente de dos diferenciales $\frac{dy}{dx}$. Además, cuando se calculan derivadas, éstas se calculan respecto de "algo", es decir, con respecto a una variable independiente, mientras que una diferencial es un incremento de una sola función. Además, las reglas para diferenciales y derivadas son equivalentes.

Entonces calculando las diferenciales para (27):

$$d\left(\frac{x^3 - y^2}{2} + x + 4y\right) = d(k) \Longrightarrow \frac{1}{2}(3x^2dx - 2ydy) + dx + 4dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(\frac{3}{2}x^2 + 1)dx - (2y - 4)dy=0.$$

En las secciones precedentes hemos visto la forma de comprobar si una función expresada en forma explícita o implícita hace parte del conjunto solución de una ecuación diferencial dada y hemos destacado la diferencia entre soluciones generales y particulares. Sin embargo, aún no hemos resuelto preguntas relacionadas con los requisitos y condiciones de existencia y unicidad de dichas soluciones y no hemos tratado los llamados problemas de valor inicial.

Problemas con valores iniciales (PVI)

Como una aplicación inmediata de resolver una ecuación diferencial, habitualmente interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial pero sujeta a unas condiciones que se han establecido previamente, es decir, proponen un valor inicial para la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) o sus derivadas sucesivas.
Se dice que se resuelve un problema de valores iniciales cuando se pide resolver una ecuación diferencial:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

que está sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 , \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} ,$$

donde los valores y_0 , y_1 , y_{n-1} son constantes de valor real arbitrario y los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto $x_0 , y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_1 , \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman condiciones iniciales.

En general, el problema con valores iniciales descrito anteriormente, se llama problema con valores iniciales de $n - ésimo$ orden.

En particular, el problema de valor inicial:

$$\text{Resolver } d_y / d_x = f(x,y),$$

sujeto a la condición

$$y\ (x_0) = y_0$$

Se llama un problema de valor inicial de primer orden. El cálculo diferencial nos enseñó que este problema se puede interpretar geométricamente: se trata de buscar una solución de una ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0 tal que su gráfica pase por el punto dado (x_0, y_0). en la figura 2 se presenta una curva solución.

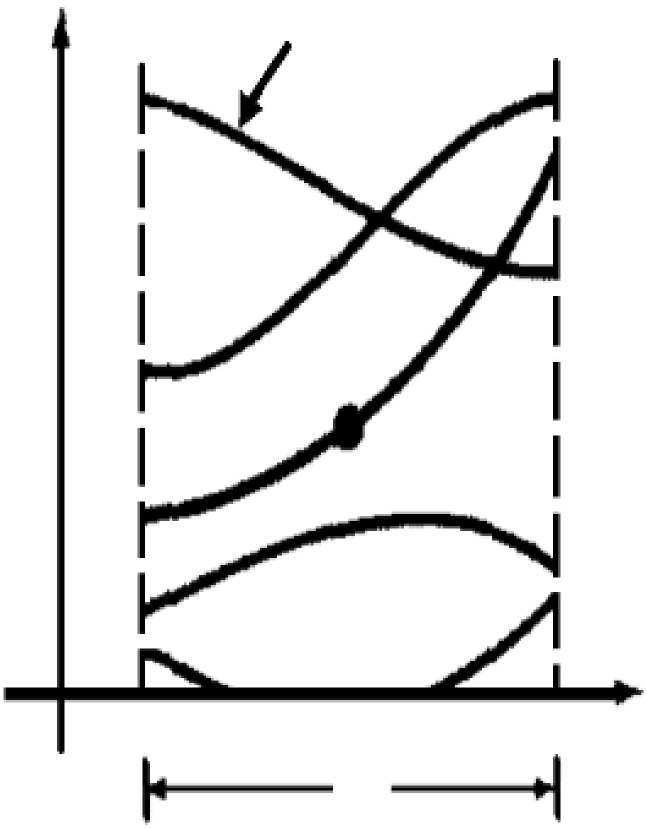

Figura 2. Interpretación geométrica problema de valor inicial de primer orden
Fuente: propia

En particular, el problema de valores iniciales:

$$\text{Resolver } \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'),$$

sujeto a las condiciones

$$y(x_0) = y_0 \ , y'(x_0) = y_1$$

Se llama un problema con valores iniciales de segundo orden. Para interpretarlo geométricamente, de manera similar al caso anterior, se busca una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no solo pase por el punto dado $(x_0 \, , y_0)$, sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1 . En la figura 3 se presenta una curva solución.

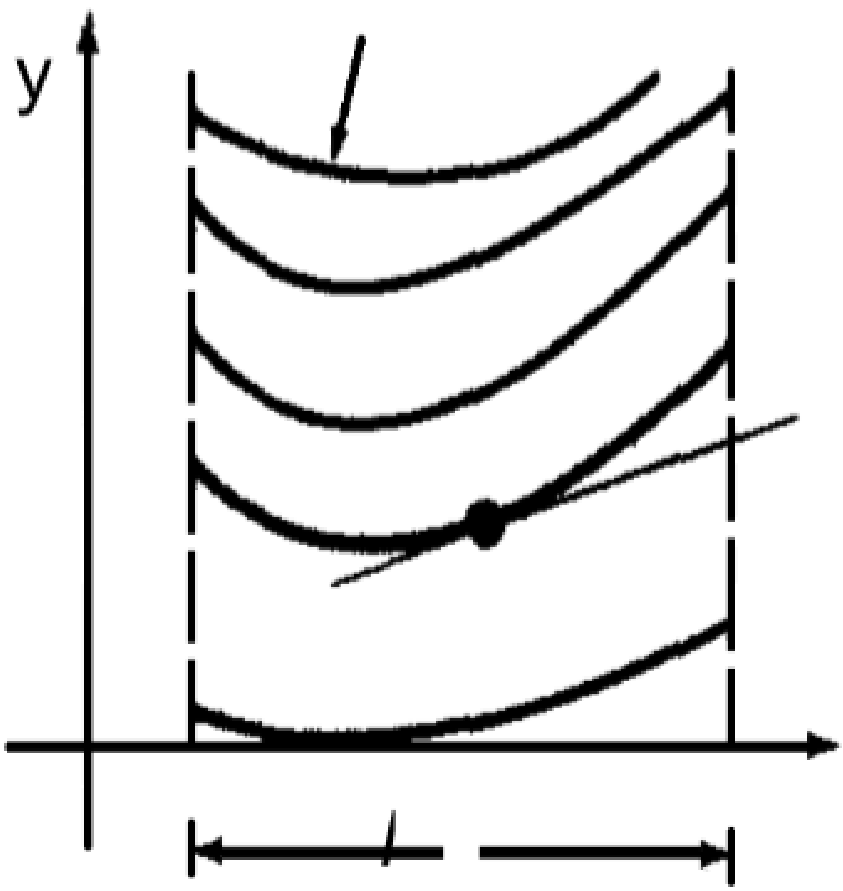

Figura 3. Interpretación geométrica problema de valores iniciales de segundo orden.
Fuente: propia

Ejemplo 5. PVI. Encuentre la solución para el problema con valor inicial $y' + y = 0$; $y(-1) = 2$, si se sabe que la solución general para esta ecuación diferencial es $y(x) = c_1e^{-x}$, con c_1 constante arbitraria.

Solución. Este es un caso de problema con valor inicial de primer orden.
Reemplazando $y(-1) = 2$ en la solución, es decir, en $y(x) = c_1e^{-x}$, nos queda $y(-1) = c_1e^{-2} \Rightarrow 2 = c_1e^{-2} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{e^{-2}} = c_1 = 2e^2$, lo que significa que debemos seleccionar $c_1 = 2e^2$. Al reemplazar este valor de c_1 en $y(x) = c_1e^{-x}$ nos queda $y(x) = c_1e^{-x} \Rightarrow y(x) = 2e^2\, e^{-x} \Rightarrow y\,(x) = 2e^{2-x}$ como la solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 6. PVI. Determine si alguna de las funciones $y_1(x) = \sin 2x$, $y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $y_3(x) = x$ es una solución para el problema con valor inicial $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución. Este es un caso de problema con valores iniciales de segundo orden.
Analicemos la posible solución $y_1(x) = sin2x$:
$y_1(x) = sin2x$ sí es solución de $y'' + 4y = 0$. ya que con $y_1(x) = sin2x \Rightarrow$
$y'_1(x) = 2cos2x \Rightarrow y''_1(x) = -4sin2x \Rightarrow y'' + 4y = 0 \Rightarrow -4sin2x + 4(sin2x) = 0,$

Además, se cumple que $y(0) = 0$, ya que

$y_1(x) = sin2x \Rightarrow y_1(0) = sin2(0) = sin0 = 0$; pero no se cumple la segunda condición, $y'(0) = 1$, ya que

$y'_1(x) = 2cos2x \Rightarrow y'_1(0) = 2cos2(0) = 2cos0 = 2 * 1 = 2 \neq 1 = y'(0)$, luego $y_1(x)$ no cumple la segunda condición inicial, lo que implica que $y_1(x) = sin2x$ no sea una solución de valor inicial.

Analicemos la posible solución $y_2(x) = \frac{1}{2}sin2x$:

$y_2(x) = \frac{1}{2}sin2x \Rightarrow y'_2(x) = cos2x$, $y''_2(x) = -2sin2x$, reemplazando en $y'' + 4y = 0 \Rightarrow -2sin2x + 4\left(\frac{1}{2}sin2x\right) = -2sin2x + 2sin2x = 0$, luego $y_2(x)$ sí es solución de $y'' + 4y = 0$. Además se cumple que $y(0) = 0$, ya que

$y_2(x) = \frac{1}{2}sin2x \Rightarrow y_2(0) = \frac{1}{2}sin2(0) = 0$, y $y'(0) = 1$, ya que $y'_2(x) = cos2x \Rightarrow y'_2(0) = cos2(0) = 1$. Entonces, $y_2(x) = \frac{1}{2}sin2x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ y cumple las dos condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, lo que implica que $y_2(x) = \frac{1}{2}sin2x$ sí es una solución con valores iniciales.

Analicemos la posible solución $y_3(x) = x$:

$y_3(x) = x \implies y'_3(x) = 1, y''_3(x) = 0$, como $y'' + 4y = 0 \implies 0 + 1 = 1 \neq 0$, luego $y_3(x) = x$ no satisface la ecuación diferencial dada.

Un preámbulo a la solución de ecuaciones diferenciales.

Con el propósito de comenzar el productivo camino en la aplicación de métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y orden superior, en especial las de segundo orden, emprenderemos el análisis del tipo de ecuaciones diferenciales cuya solución no presenta mayores dificultades, ya que se "limitan" a resolver integrales por los métodos vistos en cursos anteriores.

Ya sospechará usted que iniciar la búsqueda de una solución a partir de la ecuación diferencial dada es un camino que seguramente va a presentar obstáculos. Aunque en este módulo se presentan algunos métodos y procesos para lograrlo, nuevamente debe tener presente que los fundamentos de derivación, y por supuesto de integración, son requisito indispensable, parte de su éxito depende de este hecho.

Soluciones sencillas de la forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x)}$.

Las ecuaciones diferenciales más sencillas de resolver son aquellas de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ (28) .

Éstas se resuelven escribiendo $\frac{dy}{dx} = f(x)$ de la forma

$$y = \int f(x)dx + c \ (29),$$

utilizando métodos propios del Cálculo integral; como usted sabe, algunas integrales suelen ser muy complicadas de resolver y varias de ellas se resisten a ser resueltas.

`Ejemplo 7.` Soluciones de ecuaciones diferenciales que resultan en una integral indefinida.

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - x^2(4 - x^3) = 0 \ (30).$$

Solución. Despejando $\frac{dy}{dx}$ nos queda $\frac{dy}{dx} = x^2(4 - x^3)$, con lo cual la integral solución es

$$y = \int x^2(4 - x^3)dx \ (31).$$

Haciendo la sustitución $u = (4 - x^3)$, tenemos que $du = -3x^2dx$ y $dx = -\frac{du}{3x^2}$. La integral queda entonces

$-\int u\frac{du}{3x^2} = -\frac{1}{3}\int udu = -\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right) + c = -\left(\frac{u^2}{6}\right) + c = -\frac{(4-x^3)^2}{6} + c$, y la solución (explícita) de (19) es

$$y = -\frac{(4 - x^3)^2}{6} + c$$

Ecuaciones diferenciales separables de primer orden

Hemos presentado ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden cuya forma es la más simple; su solución aparece al resolver una integral indefinida, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow \int dy = \int f(x)dx. \Longrightarrow y = \int f(x)dx.$$

Existe otra forma muy sencilla en que se pueden presentar las ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución después de ciertos arreglos algebraicos, es muy similar al nivel más sencillo presentado en el ejemplo 5; se trata de las ecuaciones diferenciales separables, aquellas que se pueden escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Estas ecuaciones se caracterizan porque en la parte derecha de la igualdad aparecen dos funciones que se multiplican entre sí; una de ellas depende de la variable dependiente (casi siempre y) y la otra de la variable independiente (casi siempre x). Para resolverlas, separamos las variables y resolvemos por integración:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + k \ .$$

Ejemplo 8. Soluciones de ecuaciones diferenciales separables. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 5x(y+3)^2.$$

Al separar las variables y escribir las integrales nos queda

$$\int \frac{dy}{(y+3)^2} = \int 5xdx.$$

Resolvamos cada integral por separado:

Para la integral $\int \frac{dy}{(y+3)^2}$ realizamos la sustitución $u = y + 3 \implies dy = du$, con lo que

$$\int \frac{dy}{(y+3)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + k = \frac{(y+3)^{-1}}{-1} + k.$$

La integral $\int 5xdx = 5\int xdx = \frac{5x^2}{2} + k.$

Al igualar las soluciones de las integrales respectivas nos queda

$$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} + k = \frac{5x^2}{2} + k \implies -\frac{1}{(y+3)} = \frac{5x^2}{2} + k = \frac{5x^2+2k}{2} = \frac{5x^2+k}{2} \implies -\frac{1}{(y+3)} = \frac{5x^2+k}{2}.$$

Esta última igualdad se convierte en la solución implícita de (34); sin embargo, en este caso podemos despejar y para obtener su solución explícita, es decir, despejar y:

$$\frac{-1\cdot 2}{(5x^2+k)} = y + 3 \implies y = \frac{-2}{(5x^2+k)} - 3$$

Recuerde que siempre que la constante k sea multiplicada (u otra operación que la afecte) por un nuevo número, de manera automática se genera una nueva constante k.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación diferencial

$e^x dx = 2ydy$ con condiciones iniciales $y(1) = 1$.

Al separar las variables y escribir las integrales nos queda
$-2\int ydy + \int dx = c \implies y^2 = e^x + c$. Al sustituir la condición inicial $y(1) = 1$, nos queda $(1)^2 = e^1 + c \implies 1 = e + c \implies c = 1 - e$. Entonces una solución particular con las condiciones iniciales $y(1) = 1$ es

$$y^2 = e^x + 1 - e\ .$$

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 32 a 36.

Ecuaciones convertibles a separables

En las secciones precedentes hemos resuelto ecuaciones diferenciales de primer orden en las que de manera inmediata se pudieron separar sus variables de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.

Mediante algún método de solución de integrales se llegó a la solución $f(x, y) = c$.

No existe una regla general que nos brinde una sustitución adecuada para que una ecuación diferencial de primer orden se pueda expresar de una manera "más sencilla" para tratar de resolverla por alguno de los métodos vistos en los cursos de Cálculo diferencial e integral. La experiencia nos indica que la mejor regla es la práctica constante y el ensayo y el error a la hora de transformar dicha ecuación en una expresión más simple.

En los dos ejemplos siguientes, las sustituciones realizadas transforman esas ecuaciones aparentemente "difíciles" en ecuaciones diferenciales con variables separables.

Instrucción

A continuación, realizar la segunda parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Ejemplo 10. Resolver la ecuación diferencial[1]

$(x^2y^3+y)dx=(x^3y^2-x)dy.$

Organizando los diferenciales tenemos $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y^3+y}{x^3y^2-x}$. Claramente en esta ecuación no se pueden separar las variables, es decir, no se puede obtener una expresión de la forma $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$. Sin embargo, la ecuación propuesta se puede transformar en una ecuación diferencial separable utilizando la sustitución $z=xy$. Veamos una forma de hacerlo.

Sea $z=xy \Rightarrow dz=xdy+ydx \Rightarrow \frac{dz}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y \Rightarrow x\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}.$

Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta, tenemos

$$\frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}=\frac{y(x^2y^2+1)}{x(x^2y^2-1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-y=\frac{y(z^2+1)}{(z^2-1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{y(z^2+1)}{(z^2-1)}+y=\frac{yz^2+y+yz^2-y}{(z^2-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2yz^2}{(z^2-1)}=\frac{2(\frac{z}{x})z^2}{(z^2-1)}=\frac{2z^3}{x(z^2-1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2z^3}{x(z^2-1)} \Rightarrow \int\frac{(z^2-1)}{2z^3}dz=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{z^2}{z^3}dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^3}dz=lnx+c \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}-\frac{1}{2}\int z^{-3}dz=lnx+c \Rightarrow lnz-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}=lnx+c \Rightarrow$$

$$lnz+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^2}=lnx+c \Rightarrow lnz+\frac{1}{2z^2}=2lnx+c \Rightarrow lnxy-lnx^2+c=-\frac{1}{2(xy)^2} \Rightarrow$$

$$ln(\frac{xy}{x^2})+c=-\frac{1}{2x^2y^2} \Rightarrow -\frac{1}{2x^2y^2}=ln(\frac{y}{x})+c.$$

Ejemplo 11. Resolver la ecuación diferencial[2]

$cos(x+y)dx=xsin(x+y)dx+xsin(x+y)dy.$

Casi de manera inmediata debemos advertir que el ángulo de las funciones seno y coseno, $x+y$, que aparece en la ecuación diferencial impiden separar las variables. Para buscar la la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, quizá parezca evidente la sustitución $u=x+y$.

[1] Ejercicio número 6 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[2] Ejercicio número 15 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Primero escribamos la ecuación diferencial propuesta de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

$$[cos(x+y) - xsin(x+y)]dx = xsin(x+y)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{[cos(x+y) - xsin(x+y)]}{xsin(x+y)}$$

Ahora sigamos los pasos con la sustitución elegida: Sea $u = x + y \Rightarrow du = dx + dy \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$. Y reemplacemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[cos(x+y) - xsin(x+y)]}{xsin(x+y)} \Rightarrow \frac{du}{dx} - 1 = \frac{[cosu - xsinu]}{xsinu} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{cosu - xsinu}{xsinu} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{cosu - xsinu + xsinu}{xsinu} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{cosu}{xsinu} \Rightarrow \int \frac{sinu}{cosu} du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int tanudu = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow lnsecu = lnx + c \Rightarrow ln(\frac{1}{cosu}) - lnx = c \Rightarrow ln\frac{1}{xcosu} = c \Rightarrow$$

$$e^{ln\frac{1}{xcosx}} = e^c \Rightarrow \frac{1}{xcos(x+y)} = c \Rightarrow \frac{1}{c} = xcos(x+y) \Rightarrow xcos(x+y) = c.$$

Comprobación. Verifiquemos entonces que la solución de la ecuación diferencial

$cos(x+y)dx = xsin(x+y)dx + xsin(x+y)dy$, es $xcos(x+y) = c$.

La expresión $xcos(x+y)$ se deriva como un producto:

$$[xcos(x+y)]' = [x \cdot (-sin(x+y) \cdot (1+y') + cos(x+y) \cdot (1)]$$

$$= -xsin(x+y) - [xsin(x+y)] \cdot y' + cos(x+y)$$

$$= -xsin(x+y) - [xsin(x+y)] \cdot \frac{dy}{dx} + cos(x+y) =$$

$$= -xsin(x+y)dx - [xsin(x+y)]dy + cos(x+y)dx \Rightarrow$$

$$cos(x+y)dx = xsin(x+y)dx + xsin(x+y)dy.$$

En ocasiones, algunas ecuaciones diferenciales de primer orden se resuelven de una manera más sencilla usando la sustitución $u = \frac{x}{y}$. Esta sustitución nos lleva a $x = uy \Rightarrow dx = udy + ydu$, de donde $\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$.

Adicionalmente, debe advertir que en buena parte de las ecuaciones diferenciales que aparecerán a lo largo del presente curso, se requiere un uso adecuado de álgebra elemental. Buena parte de su éxito dependerá de su habilidad en las "artimañas" y "trucos" algebraicos que descubra y aplique.

Ejemplo 12. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{y^2+y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}+2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}+2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x}{y}=\frac{1}{2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right)+\frac{x}{y}.$$

La sustitución $u=\frac{x}{y}$, nos lleva a

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{1}{2e^{(u)^2}}\cdot\left(\frac{1}{(u)}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(u)}\right)+u\Rightarrow y\frac{du}{dy}=\frac{1}{2e^{(u)^2}}\cdot\left(\frac{1}{(u)}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(u)}\right)\Rightarrow$$

$$y\frac{du}{dy}=\frac{1+e^{u^2}}{2ue^{u^2}}\Rightarrow 2\int\frac{ue^{u^2}}{1+e^{u^2}}du=\int\frac{dy}{y}$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una ecuación diferencial escrita en la forma $y'=f(x,y)$ es homogénea de grado n si

$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ para todo $t\epsilon R$.

Esto quiere decir que al reemplazar x por tx y y por ty, en la expresión resultante se obtienen dos factores, uno de ellos es precisamente t^n y el otro factor es la función original $f(x,y)$.

La expresión x^2-y^2, es homogénea de grado 2, ya que $(tx)^2-(ty)^2=t^2(x^2-y^2)$.

La expresión $cos\frac{x}{y}$, es homogénea de grado 0, ya que $cos\frac{xt}{ty}=cos\frac{x}{y}=t^2cos\frac{x}{y}$.

La expresión $\sqrt{y^2+x^2}$, es homogénea de grado 1, ya que

$$\sqrt{(ty)^2+(tx)^2}=\sqrt{(ty)^2+(tx)^2}=\sqrt{t^2(y^2+x^2)}=t^1(\sqrt{y^2+x^2}).$$

La ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ siempre se puede transformar en una ecuación diferencial separable (vista en secciones anteriores), mediante la sustitución

$$z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=x\cdot z.$$

Al derivar con respecto a x nos queda

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene una ecuación diferencial en términos de x y z, esta ecuación se resuelve como una ecuación diferencial separable.

Ejemplo 13. Resolver la ecuación diferencial homogénea[5]

$$(3x^2y - y^3)dx - (3xy^2 - x^3)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3x^2y}{x^3} - \frac{y^3}{x^3}}{\frac{3xy^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} \Longrightarrow$$

$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = \frac{3(\frac{y}{x})-(\frac{y}{x})^3}{3(\frac{y}{x})^2-1}$. Hacemos la sustitución $y = z \cdot x \ \Longrightarrow z = \frac{y}{x} \ \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \ \Longrightarrow$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{3z - z^3}{3z^2 - 1} \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{3z - z^3}{3z^2 - 1} - z = \frac{3z - z^3 - 3z^3 + z}{3z^2 - 1} = \frac{4z - 4z^3}{3z^2 - 1} \Longrightarrow$$

$$\int \frac{3z^2 - 1}{4(z - z^3)}dz = \ -\frac{1}{4}\int \frac{3z^2 - 1}{(z^3 - z)}dz = \int \frac{dx}{x}$$

Como la derivada de $(z^3 - z)$ es $(3z^2 - 1) \Longrightarrow$

$-\frac{1}{4}\int \frac{3z^2-1}{(z^3-z)}dz = -\frac{1}{4}ln(z^3 - z) \Longrightarrow$

$$-\frac{1}{4}ln(z^3 - z) + c_1 = lnx + c_2 \Longrightarrow -ln(z^3 - z) = 4lnx + 4c_3 \Longrightarrow$$

$$lnx^4 + ln(z^3 - z) = c_4 \Longrightarrow lnx^4 + ln\left((\frac{y}{x})^3 - (\frac{y}{x})\right) = c_4 \Longrightarrow ln\left(x^4 \cdot \frac{y^3 - x^2y}{x^3}\right) = c_4 \Longrightarrow$$

$$e^{ln(xy^3 - x^3y)} = e^{c_4} \Longrightarrow xy^3 - x^3y = c$$

Comprobación.

Derivemos en la misma la línea la solución encontrada $xy^3 - x^3y = c$:

$$3xy^2y' + y^3 - x^3y' - 3x^2y = (3xy^2 - x^3)y' + (3x^2y - y^3) = 0$$

[5] Ejercicio número 36 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Ejemplo 14. Resolver la ecuación diferencial homogénea[4] $xydy = x^2dy + y^2dx$. Busquemos la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Longrightarrow\ y^2dx + (xy - x^2)dy \Longrightarrow 0 \Longrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{\frac{y^2}{y^2}}{\frac{xy-x^2}{y^2}} = \frac{1}{\frac{x}{y}-(\frac{x}{y})^2}.$$

En este caso la sustitución $z = \frac{y}{x}$ no sirve porque al dividir cada término por y^2 con el propósito de eliminar la variable y , no es posible reemplazar $z = \frac{y}{x}$, sino $z = \frac{x}{y}$.

La nueva sustitución[5] es entonces $z = \frac{x}{y}\ \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = z + y\frac{dz}{dy}$.

Teníamos que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{y}-(\frac{x}{y})^2}\ \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - (\frac{x}{y})^2 \Longrightarrow z + y\frac{dz}{dy} = z - z^2 \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} = -\frac{dy}{y}$

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dy}{y} \Longrightarrow \int z^{-2}dz = -lny + c_1 \Longrightarrow -\frac{1}{z} = -lny + c_1 \Longrightarrow\Longrightarrow \frac{y}{x} = lny + c_1 \Longrightarrow$$

$y = xlny + cx$. Verifique el resultado.

Ejemplo 15. Resolver la ecuación diferencial homogénea[6]

$(y^2 - 3xy - 2x^2)dx = (x^2 - xy)dy$.

Dividiendo la expresión por x^2 y haciendo la sustitución $z = \frac{y}{x}, \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, nos queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 - 3xy - 2x^2)}{(x^2 - xy)} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{xy}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2})}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2}\right)} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{xy}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2})}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2}\right)} \Longrightarrow$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 3z - 2}{1 - z} \Longrightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 3z - 2}{1 - z} - z = \frac{z^2 - 3z - 2 - z + z^2}{1 - z} = \frac{2z^2 - 4z - 2}{1 - z} = \frac{2(z^2 - 2z - 1)}{1 - z} \Longrightarrow$$

$$\int \frac{1 - z}{(z^2 - 2z - 1)}dz = 2\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{2}ln(z^2 - 2z - 1) + c_1 = 2lnx + c_2 \Longrightarrow$$

---

[4] Ejercicio número 9 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[5] Con la nueva sustitución z=xy⟹x=uy⟹dx=udy+ydu⟹dxdy=u+ydudy.

[6] Ejercicio número 20 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

$$-ln(z^2 - 2z - 1) = 4lnx + 4c_2 \Longrightarrow ln[(x^4) \cdot \frac{(y^2 - 2xy - x^2)}{x^2}] = c_3$$
$$\Longrightarrow ln[x^2(y^2 - 2xy - x^2)] = c_3 \Longrightarrow$$
$$e^{ln[x^2(y^2-2xy-x^2)]} = e^{c_3} \Longrightarrow x^2(y^2 - 2xy - x^2) = c$$

Ecuaciones diferenciales convertibles a homogéneas.

Existen ecuaciones diferenciales que, no siendo homogéneas, sí podemos convertirlas a homogénea. Estas ecuaciones son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f})$$

Mediante las sustituciones $x = u + h \Longrightarrow dx = du$, y $y = v + k \Longrightarrow dy = dv$, con h, k constantes, estas ecuaciones se reducen a una ecuación homogénea.

A continuación, dos ejemplos que nos muestran el procedimiento utilizado.

Ejemplo 16. Resolver la ecuación diferencial del Ejercicio número 3 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de (Simmons, 2007, p.79):

$$(2x + 3y + 1)dx + (2y - 3x + 5)dy = 0.$$

Aunque esta ecuación diferencial no es homogénea, sí podemos convertirla a homogénea mediante las sustituciones $x = u + h \Longrightarrow dx = du$, y $y = v + k \Longrightarrow dy = dv$, con h, k constantes.

La ecuación $(2x + 3y + 1)dx + (2y - 3x + 5)dy = 0$ es equivalente a $\frac{dy}{\mathrm{d}x} = \frac{(2x+3y+1)}{(2y-3x+5)}$.

Reemplazando las sustituciones propuestas tenemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{2(u + h) + 3(v + k) + 1}{3(u + h) - 2(v + k) - 5} = \frac{2u + 2h + 3v + 3k + 1}{3u + 3h - 2v - 2k - 5} =$$
$$\frac{2u + 3v + 2h + 3k + 1}{3u - 2v + 3h - 2k - 5}$$

Hacemos′ $2h + 3k = -1$ y $3h - 2k = 5 \implies h = 1$ y $k = -1 \implies$

$\frac{dv}{du} = \frac{2u+3v+2(1)+3(-1)+1}{3u-2v+3(1)-2(-1)-5} = \frac{2u+3v}{3u-2v} \implies \frac{dv}{du} = \frac{2u+3v}{3u-2v}$ que ya es homogénea.

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+3v}{3u-2v} = \frac{\frac{2u}{u}+\frac{3v}{u}}{\frac{3u}{u}-\frac{2v}{u}} \implies \frac{dv}{du} = \frac{2+3\frac{v}{u}}{3-2\frac{v}{u}} \implies w = \frac{v}{u} \implies \frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du} \implies$$

$$w + u\frac{dw}{du} = \frac{2+3w}{3-2w} \implies u\frac{dw}{du} = \frac{2+3w}{3-2w} - w = \frac{2+3w-3w+2w^2}{3-2w} = \frac{2+2w^2}{3-2w} \implies$$

$$\implies \frac{(3-2w)}{2(1+w^2)}dw = \frac{du}{u} \implies \frac{1}{2}\left[3\int\frac{dw}{1+w^2} - \int\frac{2w}{1+w^2}dw\right] = \int\frac{du}{u} \implies$$

Evaluemos cada integral de la parte izquierda de la última expresión:

$$3\int\frac{dw}{1+w^2} = 3tan^{-1}w.$$

$$\int\frac{2w}{1+w^2}dw \implies t = 1+w^2 \implies dt = 2wdw \implies dw = \frac{dt}{2w} \implies$$

$$\int\frac{2w}{1+w^2}dw = \int\frac{2w}{t}\frac{dt}{2w} = \int\frac{dt}{t} = lnt = ln(1+w^2)$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\left[3\int\frac{dw}{1+w^2} - \int\frac{2w}{1+w^2}dw\right] = \int\frac{du}{u} \implies 3tan^{-1}w - ln(1+w^2) = 2lnu + c \implies$$

$3tan^{-1}\frac{v}{u} - ln\left(1+(\frac{v}{u})^2\right) = 2lnu + c.$

Recordemos que $x = u + h, y = v + k \implies u = x - h, v = y - k$. Como $h = 1, k = -1 \implies$

$$u = x - 1, v = y + 1 \implies$$

$$3tan^{-1}\frac{v}{u} - ln\left(1+\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = 2lnu + c \implies 3tan^{-1}(\frac{y+1}{x-1}) - ln\left(1+\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2\right)$$
$$= 2ln(x-1) + c \implies$$

′ Este es un sistema de ecuaciones 2x2. Podemos resolverlo por el método de reducción, así:
2h+3k– 12 3h 2k–53 ⇒4h+6k– 2 9h 6k–15 ⇒13h–13⇒h–1 ⇒21+3k– 1 ⇒k– 1.

$$3tan^{-1}(\frac{y+1}{x-1}) = ln\left(1 + \left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2\right) + ln(x-1)^2 + c$$

$$= ln[(x-1)^2 \frac{(x-1)^2 + (y+1)^2}{(x-1)^2}] + c \Longrightarrow$$

$$3tan^{-1}(\tfrac{y+1}{x-1}) = ln(x-1)^2(y+1)^2 + c.$$

Ejemplo 17. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+2}{-2x+y}$.

Esta ecuación es otro ejemplo de una ecuación diferencial que, aunque no es homogénea, sí podemos convertirla a homogénea mediante las sustituciones $x = u + h \Longrightarrow dx = du$, y $y = v + k \Longrightarrow dy = dv$, con h, k constantes.

Reemplazando las sustituciones propuestas tenemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+h+2v+2k+2}{-2u-2h+v+k} = \frac{u+2v+(h+2k)+2}{-2u+v+(-2h+k)} \Longrightarrow$$

Hacemos[8] $h + 2k = -2, -2h + k = 0 \Longrightarrow h = \frac{-2}{5}, k = \frac{-4}{5} \Longrightarrow$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v+(-2)+2}{-2u+v+(0)} \Longrightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{u+2v}{2u-v} \Longrightarrow w = \frac{v}{u} \Longrightarrow \frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du} \Longrightarrow$$

Dividiendo por u cada término de la expresión $\frac{u+2v}{2u-v}$y haciendo las sustituciones propuestas nos queda

$$w + u\frac{dw}{du} = -\frac{1+2w}{2-w} \Longrightarrow u\frac{dw}{du} = -\frac{1+2w}{2-w} - w = \frac{-1-2w-2w+w^2}{2-w} = \frac{-1-4w+w^2}{2-w}$$
$$\Longrightarrow$$

$$\int \frac{(2-w)}{(w^2-4w-1)}dw = \int \frac{du}{u}$$

Al evaluar las integrales[9] nos queda

$$-\frac{1}{2}ln[(w-2)^2 - 5] = lnu + c \Longrightarrow lnu^2 + ln[(w-2)^2 - 5] = c \Longrightarrow$$

[8] Este es un sistema de ecuaciones 2x2. Podemos resolverlo por el método de reducción, así: h+2k– 22 2h+k–0 ⇒2h+4k– 4 2h+k–0 ⇒5k– 4⇒k– 45 ⇒ 2h+(45) –0 ⇒h– 25.

[9] Es pertinente recordar cómo se debe evaluar la integral de la izquierda: 2 ww2 4w 1dw– w 2w2 4w+4 5dw– (w 2) (w 2)2 5) dw.Sea t–w 2)2 5⇒dt–2w 2dw⇒dw–dt2w 2⇒ (w 2) (w 2)2 5) dw– 12dtt– 12t+c– 12[(w 2)2 5] 5

$$ln[((w-2)^2-5)\cdot(u^2)]=c \Longrightarrow e^{ln[((w-2)^2-5)\cdot(u^2)]}=e^c \Longrightarrow ((w-2)^2-5)(\mathrm{u}^2)=c.$$

$$\Longrightarrow ((\frac{v}{u}-2)^2-5)(u^2)=c \Longrightarrow (\frac{(v-2u)^2-5u^2}{u^2})(u^2)=c \Longrightarrow v^2-4uv-u^2=c \Longrightarrow$$

$$\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-4\left(y+\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)-\left(x+\frac{2}{5}\right)^2=c$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{5y+4}{5}\right)^2-4\left(\frac{5y+4}{5}\right)\left(\frac{5x+2}{5}\right)-\left(\frac{5x+2}{5}\right)^2=c$$

$$\Longrightarrow (5y+4)^2-4(5y+4)(5x+2)-(5x+2)^2=25c$$

$$\Longrightarrow (5y+4)^2-4(5y+4)(5x+2)-(5x+2)^2=c.$$

Problemas de crecimiento y decrecimiento

Ley de Enfriamiento de Newton

Isaac Newton[10], uno de nuestros grandes protagonistas en la creación de muchos resultados relacionados con el Cálculo diferencial e integral y por supuesto con las ecuaciones diferenciales, estableció una ley para el calentamiento y enfriamiento de los cuerpos. Esta ley establece que la variación de la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo (o la razón de cambio en el tiempo de la temperatura de un cuerpo) es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. Sea T_m la temperatura del medio ambiente, T la temperatura del cuerpo, $\frac{dT}{dt}$ la razón de cambio en el tiempo de la temperatura del cuerpo, entonces la ley de enfriamiento de Newton se puede escribir como

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_m)$$

[10] En la línea del tiempo de este módulo encuentra ideas importantes sobre Newton y otros científicos relacionadas con el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales.

La constante de proporcionalidad k, se toma como positiva (Figura 1); al hacerlo, se requiere el signo menos en esta ley para hacer que la razón de cambio $\frac{dT}{dt}$ sea negativa en un proceso de enfriamiento cuando T es mayor que T_m y positiva en un proceso de calentamiento cuando T es menor que T_m.

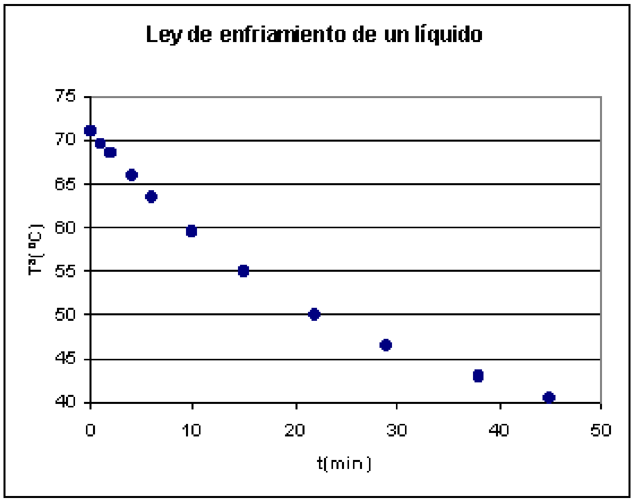

Figura 4. Ley de Enfriamiento de un liquido
Fuente. https://majocosno.wordpress.com/about/calor/transferencia de calor/ley del enfriamiento/

Ejemplo 18. Ley de Enfriamiento de Newton.

Se coloca una barra de metal a 90 $°C$ en un laboratorio con una temperatura constante de 18 $°C$. Si después de un cuarto de hora la temperatura de la barra de metal disminuye a 40 $°C$, determine

a. El tiempo requerido para que la barra alcance una temperatura de 20 $°C$.
b. La temperatura de la barra transcurridos 10 minutos.

Primero resolvamos la ecuación para T, de la siguiente manera:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \Rightarrow \frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int -kdt \Rightarrow lnT - T_m = -kt + c$$
$$\Rightarrow e^{ln(T-T_m)} = e^{-kt+c} \Rightarrow T - T_m = e^{-kt}e^{c} \Rightarrow T - T_m = ce^{-kt}$$

De donde T es la solución buscada para la temperatura del cuerpo después de cierto tiempo t

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

Con los datos del problema, la temperatura del medio ambiente es la temperatura del laboratorio, es decir, $T_m = 18\ ^\circ C$. La temperatura del cuerpo en el instante inicial, cuando $t = 0$ minutos, corresponde a $T = 90\ ^\circ C$.

Advierta que en la ecuación $T = T_m + ce^{-kt}$ aparecen dos constantes por descubrir, c y k. Entonces usemos las condiciones iniciales del problema para encontrarlas:

Busquemos c . Como $T_m = 18$ y $t = 0$ cuando $T = 90$, entonces $T = T_m + ce^{-kt}$ nos queda

$$90 = 18 + ce^0 \Rightarrow c = 72.$$

Busquemos k. Con el valor de $c = 72$, volvamos a la ecuación $T = T_m + ce^{-kt}$ que nos queda $T = 18 + 72e^{-kt}$. Sabemos que $t = 15$ cuando $T = 40$, entonces

$$T = 18 + 72e^{-kt} \Rightarrow 40 = 18 + 72e^{-k(15)} \Rightarrow \frac{22}{72} = e^{-15k} \Rightarrow$$

$$ln\frac{22}{72} = lne^{-15k} \Rightarrow k = \frac{ln\frac{22}{72}}{-15} = 0{,}0790, \text{ de donde}$$

$$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t}.$$

Ya podemos calcular tiempo requerido para que la barra alcance una temperatura de 20 $^\circ C$, es decir, despejar la variable t para el valor $T = 20$. Nos queda

$$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Rightarrow 20 = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Rightarrow e^{-0{,}0790t} = \frac{20 - 18}{72} \Rightarrow$$

$$lne^{-0{,}0790t} = ln\frac{2}{72} \Rightarrow -0{,}0790t = ln\frac{2}{72} \Rightarrow t = \frac{-3{,}5835}{-0{,}0790} = 45{,}3.$$

Para que la barra alcance una temperatura de 20 $^\circ C$ deben transcurrir aproximadamente 45 minutos.

Busquemos ahora la temperatura de la barra transcurridos 10 minutos:

$$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Rightarrow T = 18 + 72e^{-0{,}0790(10)} \Rightarrow T = 18 + 32{,}7 \Rightarrow T = 50{,}7$$

Después de 10 minutos la barra alcanza una temperatura de 50,7 $^\circ C$.

Lectura recomendada

Ecuaciones diferenciales
García, A. y Reich, D.
Páginas 19 a 25.

Crecimiento poblacional

En las ciencias naturales (biología) interesa mucho la forma como una población de especies crece con respecto al tiempo. Se sabe que en períodos de tiempo relativamente cortos la velocidad con que crecen algunas poblaciones como animales muy pequeños o bacterias es proporcional a la población que se tenga en algún momento del presente. Supongamos que $P(t)$ es una población de bacterias en el tiempo t y que, como ya se dijo, la población está creciendo de manera constante a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, entonces interesa establecer como está relacionado P con t, o en otras palabras, determinar P como función de x. Volviendo al concepto de razón de cambio, como el ritmo de crecimiento de P es proporcional a P , entonces podemos escribir esta variación en términos de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Resolviendo para P, tenemos $\frac{dP}{dt} = kP \Longrightarrow \frac{dP}{P} = kdt \Longrightarrow lnP = kt + c$. Para determinar la constante de integración c, es necesario establecer las condiciones iniciales, es decir, para una población en determinado instante que tomamos como inicial, $P = P_0$ cuando $t = 0$.

Volviendo al resultado preliminar $lnP = kt + c \Longrightarrow lnP_0 = k(0) + c \Longrightarrow c = ln\mathrm{P}_0$. Entonces, $lnP = kt + c \Longrightarrow lnP = kt + lnP_0 \Longrightarrow e^{lnP} = e^{(kt+lnP_0)} \Longrightarrow P = e^{kt} \cdot e^{lnP_0}$. En esta última expresión el término e^{lnP_0} es una nueva constante P_0, y llegamos a

$P = P_0 e^{kt}$.

El propósito de establecer esta dependencia de P con respecto a t es muy útil ya que nos sirve para predecir la población en cualquier instante de tiempo t o bien para determinar qué tiempo puede demorarse alcanzar cierta población (Figura 2).

Aunque en la introducción del problema actual consideramos el contexto de animales muy pequeños y bacterias, supongamos, sin molestar a la raza humana, que aplica para nosotros. En este sentido, la tasa de crecimiento es el promedio porcentual anual del cambio en el número de habitantes, como resultado de un superávit (o déficit) de nacimientos y muertes, y el balance de los migrantes que entran y salen de un país.

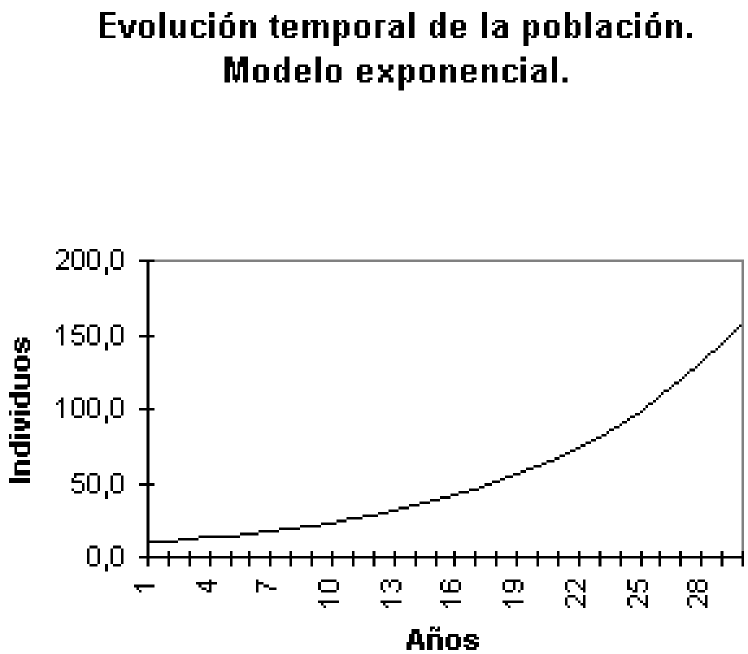

Figura 5. Evolución temporal de la población
Fuente. http://tarwi.lamolina.edu.pe/~acg/Capitulo%20III%20Ecologia.htm

Instrucción

A continuación, resuelva la tercera parte de la actividad de aprendizaje práctica.

Ejemplo 19. Para 2014 en Colombia (Index Mundi, 2017) la población está creciendo a una tasa media aproximada de 1,07 por 100 anual, es decir, $k = 0,0107$. Entonces la expresión $P = P_0 e^{kt}$ aplicada a la tasa de crecimiento de la población colombiana en 2014 se transforma en

$$P = P_0 e^{0,0107t}.$$

Si por ejemplo nos queremos preguntar cuánto tiempo debe transcurrir para que la población colombiana se duplique, entonces

$$P = 2P_0 \implies 2P_0 = P_0 e^{0,0107t} \implies 2 = e^{0,0107t} \implies ln2 = lne^{0,0107t} \implies ln2 = 0,0107t \implies t = \frac{ln2}{0,0107} \implies t = 64,7 \text{ años.}$$

Este resultado nos dice que si en la actualidad tenemos aproximadamente 48000000 de habitantes en Colombia, entonces deben pasar aproximadamente 65 años para que esta cifra se duplique.

Instrucción

Para finalizar, le invitamos a revisar un resumen de los conceptos de ecuaciones diferenciales tratados hasta ahora en el recurso de aprendizaje videoresumen.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, D., Álvarez, L., y Calzada, D. (2010). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos.*

Bargueño, F., y Alonso, D. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales: con introducciones teóricas.*

Blanes, Z., Ginestar, P., y Roselló, F. (2014). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.* Segunda. edición

Bobadilla, A., y Labarca, B. (2014). *Cálculo en una variable.*

Caicedo, A., y García, J. (2010). *Métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Camacho, A. (2010). *Cálculo diferencial.*

Castro, F. (2010). *Estabilidad: de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones funcionales: con sus aplicaciones.*

García, H. (2014). *Ecuaciones diferenciales.*

________. (2014). *Cálculo de varias variables.*

García, H., y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión.*

Guerrero, T. (2014). *Cálculo diferencial: serie universitaria patria.*

Index Mundi. (2017). *Colombia Tasa de crecimiento.*

López, M., y Acero, I. (2009). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas.* Segunda. Edición

Mesa, F. (2012). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción.*

Mombo, K. (2015). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias: una estrategia didáctica con integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el instituto superior de ciencias de la educación de Cabinda.*

Ortiz, C. (2014). *Cálculo diferencial.*

Ortiz, C., Ortiz, J., y Ortiz, F. (2015). *Cálculo diferencial.* Segunda. edición

Pagola, M., y López, G. (2017). *Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva.* Segunda. edición

BIBLIOGRAFÍA

Rivera, F. (2014). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias.*

Reyes, G. (2012). *Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas.*

Simmons, G. (2007). *Ecuaciones diferenciales*. Teoría, técnica y práctica. McGraw Hill.

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr

San José, Costa Rica