SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

AUTOR: JAIRO ARIZA HERREÑO

San Marcos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este eje abordaremos los diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales teniendo en cuenta que estos constituyen una herramienta importantísima en las matemáticas que se puede usar para la solución de problemas de diversa índole, se hará especial énfasis en los métodos de solución que involucran la utilización de matrices y determinantes tales como el método de Gauss, Cramer y Gauss-Jordan.

Sistemas de ecuaciones lineales

Figura 1.
Fuente: Shutterstock/172115972

En la práctica de la matemática, a veces se requiere trabajar de manera simultánea con más de una ecuación en la cual aparecen variables diversas, es decir, con sistemas de ecuaciones lineales.

La solución y análisis de sistemas de ecuaciones lineales encuentra una amplia aplicación en la ciencia y en la tecnología, ya que a partir de la aplicación de estas podemos resolver una muy variada cantidad de problemas como, por ejemplo, el análisis de circuitos eléctricos, las estructuras de redes y sus posibles flujos en el área de transporte, los sistemas de comunicación simultáneos en el área de comunicaciones, los estudios de mercadeo y comportamiento de productos en economía, las cargas que pueden soportar distintas estructuras en ingeniería civil, el balanceo de reacciones químicas, los problemas de móviles simultáneos, etc. En particular, se puede afirmar que en cualquier rama de la ingeniería existe al menos una aplicación que requiera del planteamiento y solución de esos sistemas.

Estudiaremos los diferentes métodos de resolución y el análisis de sistemas de ecuaciones lineales como herramientas fundamentales para comprender los conceptos del álgebra lineal y daremos especial importancia a las técnicas relacionadas con matrices, porque son adecuadas para resolver sistemas de orden superior.

Conceptos y forma matricial

Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0ax + by + c = 0$ o bien, su equivalente $ax + by = cax + by = c$ con *a* y *b* diferentes de cero, se considera una ecuación lineal con dos variables *x* y *y* (lineal porque el exponente de sus variables es uno). De igual manera, la ecuación $ax + by + cz + d = 0ax + by + cz + d = 0$ es una ecuación lineal con tres variables *x*, *y* y *z*. Y así podríamos seguir describiendo ecuaciones con cuatro, cinco o más variables.

Un **sistema de ecuaciones** se define como una agrupación de ecuaciones en la cual todas tienen las mismas variables, para el caso de ecuaciones lineales todos los exponentes de las variables deben ser uno. Para resolver estos sistemas es necesario que el número de variables sea igual al número de ecuaciones, es decir, si tenemos dos variables debemos tener dos ecuaciones, si las variables son tres debemos tener tres ecuaciones y así sucesivamente, al resolver el sistema debemos encontrar los valores de cada una de las variables que satisfagan a cada una de las ecuaciones.

En álgebra básica nos enseñan varios métodos aritméticos y uno gráfico que son prácticos para resolver estos sistemas de ecuaciones, realizaremos un breve repaso de algunos de estos.

- Método de igualación: este consiste en despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones del sistema y luego igualar los despejes para así obtener una ecuación de primer grado con una variable que es muy sencilla de resolver y finalmente reemplazar el valor hallado en uno de los despejes iniciales.

Método de igualación
Método aritmético que consiste en que ambos lados de una ecuación tengan el mismo valor.

Ejemplo

Ejemplo 1

Método de igualación para sistemas 2x2

Resuelva utilizando el método de igualación:

$x + 3y = -1$ ecuación 1.

$2x - y = 5$ ecuación 2.

Despejamos x en las dos ecuaciones:

$$x = -1 - 3y \qquad x = \frac{5 + y}{2}$$

Igualamos los dos resultados (despejes):

$$-1 - 3y = \frac{5 + y}{2}$$

Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida:

$$-2 - 6y = 5 + y$$

$$-6y - y = 5 + 2$$

$$-7y = 7$$

$$y = -1$$

Ecuación
Igualdad matemática en la que se desconoce el valor de una o varias variables.

Reemplazamos este valor en nuestro primer despeje:

$$x = -1 - 3(-1)$$
$$x = -1 + 3$$
$$x = 2$$

Y así obtenemos nuestra solución que es **x = 2** y **y = -1**.

Estos valores encontrados son los que satisfacen las dos ecuaciones, si los reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones veremos cómo nos da una igualdad.

$$2x - y = 5$$

Reemplazando los valores encontrados para x y tenemos:

$$2(2) - (-1) = 5$$
$$4 + 1 = 5$$
$$5 = 5$$

De esta manera verificamos que la solución encontrada para el sistema dado es correcta.

- Método de sustitución: este consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones y reemplazar este despeje en la otra ecuación para obtener nuevamente una ecuación de primer grado con una variable.

Ejemplo 2

Método de sustitución para sistemas 2x2

Resuelva utilizando el método de sustitución:

$2x + 3y = 2$ ecuación 1.

$x - 2y = 8$ ecuación 2.

Despejamos x en la segunda ecuación:

$$x = 8 + 2y$$

Reemplazamos este despeje en la primera ecuación:

$$2(8 + 2y) + 3y = 2$$

Resolvemos la ecuación para obtener el valor de x:

$$16 + 4y + 3y = 2$$
$$4y + 3y = 2 - 16$$
$$7y = -14$$
$$y = -2$$

Reemplazamos este valor en la ecuación dos para hallar el valor de x:

$$x - 2(-2) = 8$$

$$x + 4 = 8$$

$$x = 8 - 4$$

$$x = 4$$

Entonces la solución del sistema es **x = 4** y **y = -2**, que son los valores que satisfacen las dos ecuaciones.

Para verificar nuestra respuesta reemplazamos estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones y verificamos que se cumpla la igualdad.

$$x - 2y = 8$$

$$4 - 2(-2) = 8$$

$$4 + 4 = 8$$

$$8 = 8$$

- Método de eliminación o reducción: este consiste en eliminar una de las variables para reducir de esta manera el sistema a una sola y poderlo desarrollar fácilmente, para eso procedemos a multiplicar, dividir, sumar o restar las ecuaciones entre sí valiéndonos de sus propiedades.

Ejemplo 3

Método de eliminación para sistemas 2x2

Resuelva el sistema utilizando el método de eliminación:

$3x + 4y = -2$ ecuación 1.

$x - 2y = -4$ ecuación 2.

Multiplicamos la ecuación 2 por -3:

$$3x + 4y = -2$$

$$-3x + 6y = 12$$

Al sumar las dos ecuaciones nos queda:

$$10y = 10$$

Entonces nos da como resultado:

$$y = 1$$

Reemplazando este valor en la ecuación dos encontramos el valor de x:

$$x - 2(1) = -4$$

$$x - 2 = -4$$

$$x = -4 + 2$$

$$x = -2$$

Nuestra solución es **y = 1** y **x = -2**, que son los valores que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Para realizar la prueba de nuestra respuesta reemplazamos los valores encontrados en cualquiera de las dos ecuaciones y verificamos la igualdad.

$$x - 2y = -4$$

$$-2 - 2(1) = -4$$

$$-2 - 2 = -4$$

$$-4 = -4$$

- Método gráfico: para este método se grafican las dos ecuaciones en el mismo plano cartesiano por medio de tabulaciones y las coordenadas del punto de corte de las dos rectas nos dan la solución del sistema.

Ejemplo 4

Método gráfico para sistemas 2x2

Resuelve por el método gráfico:

$-x + 2y = 4$ ecuación 1.

$x + y = 5$ ecuación 2.

Despejando y tabulando:

$$y = \frac{4 + x}{2}$$

X	Y
0	-2
-2	1

$$y = 5 - x$$

X	Y
0	5
5	0

Figura 2.
Fuente: https://bit.ly/1YzEAJ5

Tabular

Consiste en dar valores arbitrarios a una variable para obtener los valores de la otra variable.

En este caso el punto de corte de las rectas es el punto del plano cartesiano de coordenadas (2,3), lo que indica que nuestra solución es **x = 2** y **y = 3**.

Los métodos descritos anteriormente se pueden aplicar a sistemas de ecuaciones de orden mayor, pero el trabajo se vuelve bastante dispendioso por lo que es más recomendable trabajar con métodos que incluyan matrices.

Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

En donde a son los coeficientes numéricos de las ecuaciones, x son las diferentes variables de las ecuaciones y b los términos independientes, se puede definir su representación matricial como

$$
\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

O simplemente como

$$Ax = B$$

Coeficientes

Números reales o complejos que se encuentran en una ecuación, multiplicando o dividiendo las variables o como términos independientes.

Matriz ampliada

También conocida como **matriz aumentada** de un sistema de ecuaciones lineales, es de vital importancia puesto que se utiliza en la solución de sistemas de ecuaciones por medio de métodos como Gauss y Gauss-Jordán. Se obtiene a partir de la representación matricial de un sistema de ecuaciones y consiste en colocar en una sola matriz las matrices de coeficientes y la de términos independientes separadas por medio de una línea vertical.

Para un sistema de ecuaciones lineales definido de la forma:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

Su matriz aumentada queda así:

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n} & b_1 \\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}+a_{m2}+\ldots+a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Método de Gauss

También conocido como **método de eliminación gaussiano**, este método es bastante práctico para resolver sistemas de ecuaciones lineales de cualquier orden, consiste en una aplicación sucesiva del método de eliminación o reducción que nos permite encontrar un sistema de ecuaciones que sea equivalente al original. Consta de tres pasos a seguir:

- Se forma la matriz aumentada del sistema (matriz de coeficientes y términos independientes).
- Por medio de transformaciones elementales por filas se debe obtener una matriz escalonada del sistema.
- Finalmente resolver el nuevo sistema obtenido por medio de sustituciones hacia atrás, es decir: se toma la ecuación más sencilla, se resuelve y el valor obtenido se reemplaza en la siguiente ecuación y así sucesivamente hasta obtener todos los valores que satisfagan el sistema. Las filas que constan únicamente de ceros se pueden ignorar en la solución del nuevo sistema, ya que la ecuación correspondiente será satisfecha por cualquier valor que se encuentre de las incógnitas.

A continuación, ilustraremos la aplicación del método con algunos ejemplos.

Ejemplo

Ejemplo 5

Método de Gauss para un sistema 3x3

Resolver el sistema:

$x-3y+4z=21$ ecuación 1.

$3x+y-z=-18$ ecuación 2.

$2x-y+3z=12$ ecuación 3.

Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & -18 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

Procedemos a realizar las transformaciones por filas:

$f_2 = 3f_1 - f_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & -10 & 13 & 81 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

$f_3 = 2f_1 - f_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & -10 & 13 & 81 \\ 0 & -5 & 5 & 30 \end{array}\right]$$

$f_3 = f_2 - 2f_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & -10 & 13 & 81 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array}\right]$$

De esta manera obtenemos el sistema equivalente:

$$x - 3y + 4z = 21$$

$$-10y + 13z = 81$$

$$3z = 21$$

Y procedemos a realizar sustituciones hacia atrás para resolverlo:

$$z = \frac{21}{3} = 7$$

$$-10y + 13(7) = 81 = \frac{81 - 91}{-10} = 1$$

$$x - 3(1) + 4(7) = 21 = 21 + 3 - 28 = -4$$

Entonces la solución del sistema es:

$x = -4$

$y = 1$

$z = 7$

Estos valores, al ser reemplazados en cualquiera de las ecuaciones, la convierten en una igualdad. Si la reemplazamos en la ecuación 1 podemos ver cómo estos valores verifican la igualdad:

$$x - 3y + 4z = 21$$

$$-4 - 3(1) + 4(7) = 21$$

$$-4 - 3 + 28 = 21$$

$21 = 21$

Ejemplo 6.

Método de Gauss para sistemas 4x4

Resolver:

$-2x+3y+4z=-1$ ecuación 1.

$x-2z+2w=1$ ecuación 2.

$y+z-w=0$ ecuación 3.

$3x+y-2z-w=3$ ecuación 4.

Escribimos la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$f_1 \leftrightarrow f_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$2f_1 + f_2 = f_2$

$-3f_1 + f_4 = f_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$f_2 \leftrightarrow f_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$-3f_2 + f_3 = f_3$

$-f_2 + f_4 = f_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$f_3 + f_4 = f_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\dfrac{f_3}{-3}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas 4x4

Arreglo matemático que consta de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

De esta manera obtenemos el sistema equivalente:

$$x - 2z + 2w = 1$$

$$y + z - w = 0$$

$$z - \frac{7}{3}w = \frac{-1}{3}$$

$$w = 1$$

Realizando la sustitución hacia atrás obtenemos:

$$z - \frac{7}{3}(1) = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} + \frac{7}{3} = 2$$

$$y + 2 - 1 = 0 = 1 - 2 = -1$$

$$x - 2(2) + 2(1) = 1 = 1 - 2 + 4 = 3$$

Entonces la solución del sistema es:

$$x = 3$$

$$y = -1$$

$$z = 2$$

$$w = 1$$

Que son los valores que hacen que cualquiera de las cuatro ecuaciones se vuelva una igualdad, para probar que la respuesta es cierta podemos reemplazar estos valores en cualquiera de las cuatro ecuaciones y verificar la igualdad:

$$3x + y - 2z - w = 3$$

$$3(3) + (-1) - 2(2) - 1 = 3$$

$$9 - 1 - 4 - 1 = 3$$

$$9 - 6 = 3$$

$$3 = 3$$

Regla de Cramer

Método de determinantes: en este método debemos definir los determinantes para cada una de las variables de la siguiente manera.

Determinante
Herramienta matemática que asigna un número real a una matriz.

Para el sistema de ecuaciones:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Los determinantes para las variables x y y quedan así:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{c_1b_1 - b_1c_2}{a_1b_1 - b_1a_2}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Ejemplo 7

Regla de Cramer para un sistema 2x2

Resuelva el sistema por medio de la regla de Cramer:

$x + y = 5$ ecuación 1.

$2x - 2y = 2$ ecuación 2.

Para aplicar los determinantes y resolver:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{(5)(-2) - (2)(1)}{(1)(-2) - (2)(1)} = 3$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{(1)(2) - (2)(5)}{(1)(-2) - (2)(1)} = 2$$

De esta manera obtenemos nuestra solución que es **x = 3** y **y = 2,** que son los números que al reemplazarse en cualquiera de las ecuaciones del sistema las vuelven una igualdad.

$x + y = 5$

$3 + 2 = 5$

$5 = 5$

Como podemos observar, este método se puede generalizar a cualquier sistema de ecuaciones lineales, si para cada variable en el numerador reemplazamos la columna donde se encuentra la variable por la columna de términos independientes, mientras que el denominador siempre se mantendrá igual y será la matriz de coeficientes. Para un sistema 3x3 se opera tal cual como se ilustró en la sección de determinantes y para un sistema 4x4 o de orden superior se combina con el método de los cofactores.

Instrucción

A continuación, lo invitamos a revisar el recurso de aprendizaje: videorresumen, en el que se presentarán ejemplos para resolver un sistema de ecuaciones. Lo encuentra disponible en la plataforma.

Ejemplo 8

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones 3x3

Resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{ll} x - 2z = 3 & \text{ecuación 1} \\ -y + 3z = 1 & \text{ecuación 2} \\ 2x + 5z = 0 & \text{ecuación 3} \end{array}$$

Definimos los determinantes para cada una de las variables x, y, z. Después resolvemos los determinantes de orden tres como se explicó en el eje anterior.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{(3)(-1)(5) + (1)(0)(-2) + (0)(0)(-3) - ((-2)(-1)(0) + (3)(0)(3) + (0)(0)(5)}{(1)(-1)(3) + (0)(3)(2) + (0)(0)(-2) - ((-2)(-1)(2) + (3)(0)(1) + (0)(0)(5)}$$

$$x = \frac{-15 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0)}{-3 + 0 + 0 - (6 + 0 + 0)} = \frac{-15}{-9} \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{(1)(1)(5)+(3)(3)(2)+(0)(0)(-2)-((-2)(-1)(2)+(3)(0)(1)+(3)(0)(5)}{(1)(-1)(3)+(0)(3)(2)+(0)(0)(-2)-((-2)(-1)(2)+(3)(0)(1)+(0)(0)(5)}$$

$$y=\frac{5+18+0-(4+0+0)}{-3+0+0-(6+0+0)}=\frac{27}{-9}\rightarrow y=-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{(1)(-1)(0)+(0)(0)(3)+(0)(1)(2)-((3)(-1)(2)+(0)(0)(0)+(1)(0)(1)}{(1)(-1)(3)+(0)(3)(2)+(0)(0)(-2)-((-2)(-1)(2)+(3)(0)(1)+(0)(0)(5)}$$

$$z=\frac{0+0+0-(-6+0+0)}{-3+0+0-(6+0+0)}=\frac{6}{-9}\rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

Los valores encontrados para x, y, z son la solución del sistema de ecuaciones, para verificar esta respuesta podemos reemplazar estos valores en cualquiera de las tres ecuaciones y verificar que se cumple la igualdad.

$$2x+5z=0$$

$$(2)\frac{5}{3}+5\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\frac{10}{3}+\left(-\frac{10}{3}\right)=0$$

$$\frac{10}{3}-\frac{10}{3}=0\quad\rightarrow 0=0$$

Instrucción

En este punto, lo invitamos a revisar el recurso de aprendizaje: nube de palabras. Disponible en la página principal de este eje.

Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales m x n se denomina homogéneo si todos sus términos independientes son cero, si alguno o varios de sus términos independientes son diferentes de cero entonces el sistema será no homogéneo.

Un sistema homogéneo está definido por:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0$$

Este sistema se puede expresar de la forma:

$$Ax = 0 \;\; Ax = 0$$

Método de Gauss-Jordan

Este método se basa en los mismos principios del método gaussiano con la ventaja de que nos proporciona una solución directa del sistema de ecuaciones y de esta manera evita realizar las sustituciones hacia atrás. Se siguen los pasos presentados a continuación:

- Se forma la matriz aumentada del sistema (matriz de coeficientes y términos independientes).
- Por medio de transformaciones elementales por filas se debe obtener una matriz escalonada reducida del sistema.
- Finalmente, para cada fila distinta de cero, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila. Las filas que constan únicamente de ceros se pueden ignorar en la solución del nuevo sistema, ya que la ecuación correspondiente será satisfecha por cualquier valor que se encuentre de las incógnitas.

Ejemplo 9

Método de Gauss-Jordan para un sistema de ecuaciones 3x3

Resuelva aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$2x - y + z = 8$$

$$3x - z = 3$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y se realiza la reducción por operaciones elementales de filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$-2f_1 + f_2 = f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$-3f_1 + f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\frac{f_2}{-5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$6f_2 + f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\frac{f_3}{-4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$-3f_3 + f_1 = f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$-2f_2 + f_1 = f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

De esta manera, obtenemos la matriz escalonada reducida que representa el sistema y de ahí se concluye que la solución es:

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = 3$$

Para verificar que los valores encontrados para x, y, z son los adecuados, reemplazamos estos valores en cualquiera de las tres ecuaciones del sistema y comprobamos que se cumpla la igualdad:

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$2 + 2(-1) + 3(3) = 9$$

$$2 - 2 + 9 = 9$$

$$9 = 9$$

Instrucción

Con el fin de reforzar lo aprendido hasta el momento, lo invitamos a revisar el recurso de aprendizaje: infografía. Disponible en la plataforma.

Para finalizar este eje ilustraremos algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales en diversas áreas del conocimiento.

La primera aplicación que veremos se relaciona con el diseño de una dieta nutritiva para perder peso que encierra una técnica general para resolver problemas de programación lineal. En 1980 el doctor Alan Howard, junto con su equipo de trabajo, elaboró una dieta para que personas con problemas de sobrepeso pudiesen consumir los nutrientes necesarios para perder los kilos sobrantes, pero sin verse afectados en su quehacer diario, a esta dieta se llamó la dieta de Cambridge. El resultado fue un suplemento en polvo que reunía las cantidades necesarias de cerca de 30 productos que componían la dieta de una persona normal y proporcionan los nutrientes indicados para una dieta sana, para esto tuvo que incorporar a su trabajo sistemas de ecuaciones con cerca de treinta variables que gracias a los métodos de resolución matricial proporcionados por el álgebra pudo condensar, y así encontró los valores que requería su producto. Ilustraremos este modelo con un ejemplo a pequeña escala.

Ejemplo 10

Diseño de una dieta nutritiva

En la tabla se muestran tres alimentos pertenecientes a una dieta junto con la cantidad de nutrientes proporcionados por 100 gramos de cada alimento, así como las cantidades de nutrientes sugeridos por una dieta balanceada para un día.

Nutrientes	Leche descremada	Harina de soya	Suero	Cantidades sugeridas para un día
Proteínas	72	102	26	66
Carbohidratos	104	68	148	90
Grasa	0	14	2.2	6

Encuentre las cantidades exactas de leche, harina y suero que proporcionen los nutrientes requeridos para la dieta.

Para solucionar este problema se debe plantear una ecuación vectorial formada por el aporte de cada vector de nutrientes de cada alimento y expresarla como una matriz para poderla resolver. Si x, y, z son la cantidad de gramos de cada alimento respectivamente (x leche, y harina y z suero) y para saber cuánto aporta cada uno a la dieta diaria se multiplica por su respectivo vector de nutrientes $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ qué son las columnas que corresponden a cada alimento $\overrightarrow{r_1}$, y a su vez se iguala a la cantidad diaria sugerida por la dieta que es el vector, tenemos la siguiente ecuación vectorial:

$$x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3} = \vec{r}$$

Para resolver esta ecuación planteamos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 72 & 102 & 26 & 66 \\ 104 & 68 & 148 & 90 \\ 0 & 14 & 2.2 & 6 \end{array}\right)$$

Y procedemos a realizar las transformaciones elementales por fila hasta llegar a la solución del problema:

$$\frac{f_1}{72}$$

$$f_2 \leftrightarrow f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.41 & 0.36 & 0.91 \\ 0 & 145 & 2.2 & 6 \\ 104 & 68 & 148 & 90 \end{array}\right]$$

$$\frac{f_2}{14}$$

$$\frac{f_3}{148}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.41 & 0.36 & 0.91 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.42 \\ 0.70 & 0.45 & 1 & 0.6 \end{array}\right]$$

$$f_1 = -1.41f_2 + f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.14 & 0.31 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.42 \\ 0.70 & 0.45 & 1 & 0.6 \end{array}\right]$$

$$f_3 = -0.7f_1 + f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.14 & 0.31 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.42 \\ 0 & 0.45 & 0.9 & 0.38 \end{array}\right]$$

$$f_3 = -0.45f_2 + f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.14 & 0.31 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.42 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0.19 \end{array}\right]$$

$$\frac{f_3}{0.83}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.14 & 0.31 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.42 \\ 0 & 0 & 1 & 0.22 \end{array}\right]$$

$$f_1 = -0.14f_3 + f_1$$

$$f_2 = -0.15f_3 + f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.27 \\ 0 & 1 & 0 & 0.38 \\ 0 & 0 & 1 & 0.22 \end{array}\right]$$

De esta manera obtenemos los valores:

$$x = 0.27$$
$$y = 0.38$$
$$z = 0.22$$

Lo cual nos dice que se deben consumir 0.27 unidades de leche, 0.38 unidades de harina y 0.22 unidades de suero para obtener los nutrientes recomendados por la dieta. Nótese que en este caso ningún valor nos puede dar negativo pues sería imposible consumir, por ejemplo, -0.22 unidades de suero.

La segunda aplicación que ilustraremos introduce el concepto de ecuaciones lineales en diferencia o relación de recurrencia, esta se aplica al análisis de sistemas dinámicos que cambian en intervalos discretos de tiempo. Para esto es necesario crear una serie de vectores $\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_n}$ $\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_n}$ de tal forma que se puede tener información de cualquier vector si se conoce el vector inicial $\overrightarrow{v_0}$ $\overrightarrow{v_0}$.

Se trata de encontrar una matriz A de tal manera que:

$$A\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}, \ldots, A\overrightarrow{v_{n-1}} = \overrightarrow{v_n}$$

Ejemplo 11

Modelo de migración

En cierta ciudad se observa que su población fluctúa entre la zona urbana y los municipios aledaños, según estudios de demografía el 10 % de la población de los municipios se va a la ciudad anualmente y el 3 % de la población de la ciudad se va a vivir a los municipios cercanos. Si para el año 2017 la ciudad contaba con una población de 1 500 000 habitantes, mientras que los municipios aledaños contaban con una población de 950 000 habitantes, calcule la cantidad de habitantes en la ciudad y en los municipios para los años 2018 y 2019.

Podemos definir el vector de la población $\overline{v_0 v_0}$ como la combinación de la población de la ciudad y de los municipios aledaños. Lo podemos escribir como

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} c_0 \\ m_0 \end{bmatrix}$$

En donde c_0 nos indica el número de habitantes de la ciudad en 2017 y *m0* es la $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ cantidad de habitantes de los municipios. Entonces los vectores para los años 2018 y 2019 estarán dados de la forma:

$$\overrightarrow{v_1} = A\overrightarrow{v_0} \quad y \quad \overrightarrow{v_2} = A\overrightarrow{v_1}$$

Luego la matriz A está formada por los vectores de población $\vec{c}\ y\ \overrightarrow{m}$ $\vec{c}\ y\ \overrightarrow{m}$ que según las condiciones iniciales del problema son:

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0.97 \\ 0.03 \end{bmatrix} \quad y \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

De esta manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.1 \\ 0.03 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Y para resolver el problema tenemos que:

$$\overrightarrow{v_1} = A\overrightarrow{v_0}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.1 \\ 0.03 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1500000 \\ 950000 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} (0.97)(1500000) + & (0.1)(950000) \\ (0.03)(1500000) + & (0.9)(950000) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1550000 \\ 900000 \end{bmatrix}$$

Migración

Movimiento de población que consiste en desplazarse del lugar de origen para residir en otro sitio.

Esto nos indica que en el año 2018 habitarán en la ciudad 1 550 000 personas, mientras que en los municipios aledaños habitarán 900 000 personas. Ahora calculamos para el año 2019.

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.1 \\ 0.03 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1550000 \\ 900000 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} (0.97)(1550000) + & (0.1)(900000) \\ (0.03)(1550000) + & (0.9)(900000) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1593500 \\ 856500 \end{bmatrix}$$

Entonces para el 2019 se espera que en la ciudad habiten 1 593 500 personas y en los municipios 856 500 personas. Siguiendo el mismo principio podríamos seguir haciendo el cálculo para los años siguientes.

De esta manera terminamos el eje dos, esperamos que al aplicar los conceptos sobre matrices y determinantes estudiados en el eje número uno, hayan podido encontrar la solución a los sistemas de ecuaciones lineales y así haber dado respuesta a nuestra pregunta ¿cómo se emplean los métodos de solución de Gauss, Cramer y Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales en diferentes contextos?

Instrucción

Para finalizar, lo invitamos a realizar las actividades prácticas propuestas para este eje, disponibles en la plataforma. También a ampliar sus conocimientos a través de la lectura:

Aplicación del análisis factorial como una alternativa de solución al problema de multicolinealidad (pp. 181-184)

Raúl Herrera León y Rosalvic Hernández Guevara

BIBLIOGRAFÍA

Antón, H. (1994). Introducción al álgebra lineal. Recuperado de https://bibliotecavirtualmatematicasunicaes.files.wordpress.com/2011/11/introduccic3b3n-al-c3a1lgebra-lineal-3ra-edicic3b3n-howard-anton1.pdf

Apóstol, T. (2001). Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Recuperado de https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf

Bru, R., y Climent, J. (2002). *Álgebra lineal*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Fernández, S., Martínez, A., y Paniagua, R. (1994). *Manual para la matemática universitaria: álgebra lineal*. Madrid, España: Editorial ESIC.

Florey, F. (1993). *Álgebra lineal y aplicaciones*. México D. F., México: Prentice Hall.

Grossman, S., y Flores, J. (2012). Álgebra lineal. Recuperado de https://gerortiz.files.wordpress.com/2015/08/algebra_lineal_-_7ma_edicion_-_stanley_l-_grossman.pdf

Kolman, B., y Hill, D. (2006). Álgebra lineal. Recuperado de https://algebralineal2010.files.wordpress.com/2012/09/algebra-lineal-kolman.pdf

Swokowski, E., y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México D. F., México: Cengage Learning Editores.

Tejero, L. (1992). *Álgebra lineal*. Madrid, España: Universidad Nacional a Distancia.

Universidad de Valencia. (s.f.). Introducción a la Matemática Económico-Empresarial. Recuperado de https://www.uv.es/~perezsa/docencia/material/IMEE/Matrices.pdf

Zill, D., y Dewar, J. (2000). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Recuperado de http://www.prepa6tecpan.com.mx/Archivos/Biblioteca/Jes%C3%BAs_David_Martinez_Abarca/4algebra-trigonometr%C3%ADa-y-geometr%C3%ADa-anal%C3%ADtica-3ra-Edici%C3%B3n-Dennis-G.-Zill.pdf

San Marcos

www.usanmarcos.ac.cr
San José, Costa Rica