DISTRIBUCIÓN
DE
PROBABILIDADES

BINOMIAL

EXPONENCIAL

HIPERGEOMÉTRICA

NORMAL

POISSON

NOMBRE DEL AUTOR
MSC. PABLO VARGAS PEREIRA

FECHA
DICIEMBRE, 2020

Contenido

PREGUNTA DISPARADORA

La probabilidad es un concepto que la mayor parte de las personas comprende intuitivamente, por ejemplo, casi todas las personas saben que la probabilidad de ganar o perder una apuesta con el lanzamiento de una moneda es de 50% para cada una de las opciones, entonces, ¿Existe algún método probabilistico para determinar el resultado de un evento aleatorio?, por tanto, en base a la pregunta determinada podrá el o la estudiante determinar teóricamente y desde el punto de vista práctico los procesos sistemáticos de la estadística probabilistica.

ABSTRACT O RESUMEN

El presente documento tiene como objetivo desarrollar el tema de las diferentes distribuciones discretas y continuas, dentro de las distribuciones discretas que se abordará son la distribución Binomial, distribución de Poisson y la distribución Hipergeométrica, por otra parte dentro de las distribuciones continuas se trabajará la distribución Exponencial y la distribución Normal, como distribución primordial se enfocará con mayor profundidad la distribución Normal, el análisis de la desviación estándar, su valor normal o valor zeta con el desarrollo de la tabla de áreas bajo la curva normal, el calculo de un valor "X" a partir de la probabilidad conocida y el análisis de aproximación normal a la distribución binomial.

PALABRAS CLAVES

Probabilidad, distribución de probabilidades, distribución binomial, distribución Poisson, distribución hipergeométrica, distribución exponencial, distribución uniforme, distribución normal, desviación estándar, valor z, media, valor x.

INTRODUCCIÓN

En el presente folleto de trabajo se revisa el tema de las distribuciones de probabilidad, dividido en distribuciones discretas conocidas como distribuciones discontínuas y en su otra parte las distribuciones continuas, uno de los conceptos más importantes de la teoría de probabilidades es el de variable aleatoria, que intuitivamente puede definirse como cualquier característica medible que toma diferentes valores probabilísticas determinadas, toda variable aleatoria posee una distribución de probabilidad que describe su comportamiento, además, si la variable es discreta toma valores aislados dentro de un intervalo, su distribución de probabilidad especifica todos los valores posibles de la variable junto con la probabilidad de que cada uno ocurra, en el caso de la distribución de probabilidad continua la variable puede tomar cualquier valor de un intervalo y estas distribuciones permite determinar las probabilidades correspondientes de una forma usual probabilística denominada funciones de densidad o distribución de probabilidad acumulada.

CONTENIDO

I. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

Los modelos teóricos a los que se hace referencia se reducen en ambos casos a funciones de probabilidad, la teoría de la probabilidad tiene su origen en el estudio de los juegos de azar que impulsaron los primeros estudios sobre cálculo de probabilidades en el siglo XVI, aunque no es hasta el siglo XVIII cuando se aborda la probabilidad de una perspectiva matemática con la demostración de la *"ley de los grandes números"* según la cual expresa esta ley que al aumentar el número de pruebas la frecuencia de un suceso tiende a aproximarse a un número fijo denominado probabilidad. Este enfoque, denominado enfoque frecuencista se modela matemáticamente en el siglo XX cuando kolmogorov formula la teoría axiomática de la probabilidad, dicha teoría define la probabilidad como una función que asigna a cada posible evento un resultado de un experimento aleatorio y este resultado es un valor positivo de forma que se cumpla la propiedad aditiva (suma), la definición axiomática establece las reglas que deben cumplir las probabilidades, aunque no asigna valores concretos.

Como en las mediciones discretas se distinguen claramente los distintos valores de la variable, es posible construir una tabla para enlistar esos distintos valores que la variable puede asumir, si se puede determinar la probabilidad de ocurrencia de cada uno de esos valores y se les incluye a ambos en una tabla, se tiene la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

EJEMPLO 1

Si se sabe que, de acuerdo con los registros históricos, la proporción de estudiantes universitarios que no pueden igresar a la carrera que tomaron como primera opción en su propuesta es de un 3%, se puede suponer que, si se extraen de la lista de estudiantes que aplicaron la prueba de aptitud de forma al azar y aleatoria, la probabilidad de que se trate de los estudiantes que no ingresaron es de 3%. Al mismo tiempo se sabe que la probabilidad de los estudiantes que si ingresaron a la carrera es de 97%, con estos datos se puede construir una tabla de la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta:

Variable x	**Probabilidad P(x)**
No ingresaron a carrera	0,03
Sí ingresaron a carrerta	0,97
Total	1,00

Tabla 1. *Distribución tabular de probabilidad*

Esta tabla, que muestra el conjunto de todos los resultados posibles (el espacio muestral, según se vio en el folleto anterior), junto con sus correspondientes probabilidades, es una distribución de probabilidad, se trata entonces de una distribución de probabilidad de una variable discreta, además, es una distribución binomial porque la variable de interés (estudiante ingresa o no al programa de estudio) sólo puede asumir dos valores.

En la sección siguiente se revisa la forma en la que se calculan la media y la desviación estándar de una distribución de probabilidades, incluyendo ejemplos para cada una de ellas.

a. Media, varianza y desviación de una distribución de probabilidades

Se puede ilustrar el cálculo de la media y la varianza de una distribución de probabilidad mediante un ejemplo.

EJEMPLO 1

En las dos primeras columnas de la tabla 2 se muestra el número de automóviles que se vendieron a nivel de Costa Rica en los últimos 500 días del periodo 2019 - 2020.

Número de autos vendidos por día (x)	Número de días Frecuencia absoluta f_n	Frecuencia relativa f_r
1	290	0,58
2	100	0,20
3	80	0,16
4	25	0,05
5	5	0,01
Total	**500**	**1**

Tabla 2. *Distribución de frecuencias absolutas y relativas*

Como es importante aquí repasar el concepto de la frecuencia relativa, conviene recordar que, por ejemplo, el 0,58 del segundo renglón de la tercera columna significa que 58% de los días sólo se vendió un automóvil, además, la probabilidad de ocurrencia de cada valor de X tal como se vio antes, se puede interpretar la frecuencia relativa como la probabilidad de ocurrencia del resultado correspondiente. En otras palabras, la misma interpretación que se hizo de la frecuencia relativa: “58% de los días sólo se vendió un automóvil” se puede interpretar también en términos de probabilidad diciendo que, si se elige un día al azar de entre los 500 días considerados, la probabilidad de que en ese día específico sólo se vendiera un automóvil es de 58%.

Resumiendo, en la tabla 3 se muestra la distribución de probabilidad correspondiente a este ejemplo, donde se le añadieron las columnas necesarias para el cálculo de la media aritmética y de la desviación estándar, cuyos cálculos se detallan en los párrafos siguientes.

Número de autos vendidos por día (x)	$P(x)$	$\mu = \sum[x \cdot P(x)]$	$X - \mu$	$(X-\mu)^2$	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}[P(x) \cdot (X-\mu)^2]$
1	0,58	0,58	-0,71	0,50	0,29
2	0,20	0,40	0,29	0,08	0,02
3	0,16	0,48	1,29	1,66	0,27
4	0,05	0,20	2,29	5,24	0,26
5	0,01	0,05	3,29	10,82	0,11
Total	**1**	**1,71**		**18,32**	**0,95**

Tabla 3. *Tabla de distribución de probabilidad para datos discretos*

Como en el caso de una distribución de probabilidad el conjunto de los resultados posibles constituye un universo (una población), en primer lugar, se sustituye el símbolo del estadístico muestral $\bar{X}$, por el correspondiente al parámetro, la media de una población μ, y como se usa la frecuencia relativa como medida de la probabilidad, se sustituye f_r por $P(x)$, con lo cual la fórmula se convierte como se describe a continuación:

$$\mu = \frac{\sum[x \cdot P(x)]}{\sum P(x)}$$

Recordando uno de los axiomas de la probabilidad, el que dice que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos de un experimento aleatorio es igual a 1, se tiene que:

$$\sum P(x) = 1$$

Entonces, la fórmula para el cálculo de la media de una distribución de probabilidad se convierte en:

$$\mu = \sum[x \cdot P(x)]$$

Además, vale la pena anotar que esta media de una distribución de probabilidad se le conoce como el “valor esperado de la variable o esperanza matemática”, se le suele representar como E(X). Resumiendo todo lo anterior en una sola ecuación, se tiene:

$$\boldsymbol{E(x) = \mu = \sum[x \cdot P(x)]}$$

Por su parte, la varianza de la distribución de probabilidad discreta corresponde a la siguiente fórmula que se muestra:

$$\boldsymbol{Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}[P(x) \cdot (X - \mu)^2]}$$

Los mismos cambios que se anotaron antes para la media aritmética: el denominador es también igual a 1, por lo que desaparece; se sustituyen las frecuencias por las probabilidades y se sustituye el símbolo del estadístico muestral $\boldsymbol{s^2}$ por el correspondiente símbolo del parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$.
Continuando con el proceso estadístico si se obtiene el cálculo de la raíz cuadrada de la varianza a esto se le denomina desviación estándar, la misma se denota con el símbolo estadístico $\boldsymbol{\sigma}$, la formula corresponde a la siguiente:

$$Desv(x) = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[P(x) \cdot (X - \mu)^2]}$$

Se resume de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

EJEMPLO 2

Un grupo de internos de psicología clínica realizan 10 visitas diarias a pacientes en sus hogares que poseen alguna discapacidad disminuida, y descubrieron que la probabilidad de negación o no aceptación de su realidad está descrita por la siguiente distribución:

Pacientes (x)	$\boldsymbol{P(x)}$
1	0,51
2	0,27
3	0,10
4	0,12
Total	**1**

Tabla 4. *Tabla de probabilidad para variables discretas*

- **a)** Calcule la media.
- **b)** Calcule la varianza.
- **c)** Calcule la desviación estándar.

Ventas (x)	$P(x)$	μ	$X-\mu$	$(X-\mu)^2$	σ^2
1	0.51	0.51	-0.83	0.69	0.35
2	0.27	0.54	0.17	0.03	0.01
3	0.10	0.30	1.17	1.37	0.14
4	0.12	0.48	2.17	4.71	0.57
Total	**1**	**3.63**	**2.68**		**1.06**

Tabla 5. *Tabla de distribución de probabilidad para variables discretas*

Solución:

a) Calcule la media

$$\mu = \sum [x \cdot P(x)] = \mathbf{1,83}$$

b) Calcule la varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [P(x) \cdot (X-\mu)^2] = \mathbf{1,06}$$

c) Calcule la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,47} = \mathbf{1,030}$$

b. Distribución Binomial

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que se basa en un experimento aleatorio que tiene las siguientes carácterísticas:

1. La variable es binomial y, por lo tanto, es discreta, donde sólo hay dos resultados posibles.
2. Las probabilidades de éxito o de fracaso no varían de una repetición a otra del experimento, en otras palabras, los ensayos son independientes entre sí.
3. El experimento se lleva a cabo durante n ensayos iguales.

A un experimento como éste se le conoce también como proceso Bernoulli en honor del matemático Suizo James Bernoulli (1654-1705), que hizo importantes contribuciones a la teoría de la probabilidad.

Distribución Binomial:
Distribución de probabilidad discreta que se basa en un experimento aleatorio dicotómico

Cabe recordar que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es 1 y como en este caso sólo se tienen 2 resultados posibles, también la suma es igual a 1.

Se suele representar con **p** a **la probabilidad de éxito o del resultado de interés** y con una **q** a **su complemento** y se puede representar esta relación como:

$$\boldsymbol{p = 1 - q}$$

Hay muchas situaciones que se pueden considerar ensayos binomiales, como por ejemplo:

1. El lanzamiento de una moneda.
2. Los artículos industriales (televisiones, camisas, desodorantes, etc.), calificados como defectuosos o no defectuosos, si las probabilidades de que caigan en cada categoría no cambian y si el resultado en cada artículo no depende de los resultados de otros artículos.
3. El resultado de una encuesta de opinión en la que se pide a las personas calificar artículos con criterios como “me gusta” o “no me gusta”.

La distribución de probabilidad binomial tiene como fórmula:

$$\boldsymbol{P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}}$$

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}} \longrightarrow \boxed{\text{Recuerde la fórmula de combinación}}$$

Datos:

$P(x)$: $probabilidad\ de\ un\ evento\ determinado$

C_x^n: $fórmula\ de\ combinación$

p: $probabilidad\ de\ éxito$

q: $probabilidad\ de\ fracaso$

n: $tamaño\ de\ la\ muestra$

x: $cantadid\ de\ eventos\ (variable\ en\ estudio)$

EJEMPLO 1

En una empresa litográfica se sabe que el 97% de sus artículos producidos no tienen un defecto alguno, si se extrae al azar dos artículos de los que se fabrican, determine la probabilidad de:

Datos:
$p: artículos\ \sin\ defectos = 0{,}97$
$q: artículos\ con\ defectos = 0{,}03$
$n = 2$
$x = \{0{,}1{,}2\}$

a) Que ninguno de los dos artículos extraidos tenga defecto.

$x = 0$
$P(0) = (2C0)(0{,}97)^0(0{,}03)^{2-0}$
$P(0) = 0{,}0009$
La probabilidad de que ninguno de los dos artículos extraidos poseen defecto es de 0,09%

b) Que uno de los dos artículos tenga algún defecto.

$x = 1$
$P(1) = (2C1)(0{,}97)^1(0{,}03)^{2-1}$
$P(1) = 0{,}0582$
La probabilidad de que uno de los dos artículos extraidos posea algún defecto es de un 5,82%.

c) Que los dos artículos poseen defecto.

$x = 2$
$P(2) = (2C2)(0{,}97)^2(0{,}03)^{2-2}$
$P(2) = 0{,}9409$
La probabilidad de que los dos artículos extraidos posean defecto es de un 94,09%.

EJEMPLO 2

Un cerrajero se dio cuenta de que 1 de cada 8 clientes realizan algún tipo de reclamo por sus trabajos realizados. Si durante cierto día recibe a 7 clientes, ¿Cuál es la probabilidad de que 3 clientes realicen algún reclamo?

$p: reclamos = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$q: no\ reclamar = \frac{7}{8} = 0{,}875$

$n = 7$
$x = 3$

$P(3) = (7C3)(0{,}125)^3(0{,}875)^{7-3}$

$P(3) = 0{,}040071$

R/ La probabilidad de que 3 clientes realicen algún reclamo es de aproximadamente 4%

Media y varianza de la distribución binomial

Es posible calcular la media aritmética y la desviación estándar de cualquier distribución de probabilidad siguiendo los procedimientos y que las distribuciones de probabilidad se pueden resumir mediante las siguientes fórmulas cuya media aritmética corresponde a la siguiente:

$$\boldsymbol{E(x) = \mu = n \cdot p}$$

La media aritmética se conoce como esperanza matemática (E(x)), o bien, como el valor esperado o miu (μ).

La fórmula de la varianza de la distribución binomial corresponde a la siguiente:

$$\boldsymbol{Var(x) = \sigma^2 = \mu \cdot q = \overbrace{n \cdot p}^{\mu} \cdot q}$$

La varianza se define como el cuadrado de la distancia que existe de cada uno de los elementos en estudio con respecto a la media, se representa por la letra griega en minúscula sigma.

La desviación estándar de una distribución binomial corresponde a la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

Corresponde a la distancia que existe en cada uno de los elementos en estudio con respecto a la tendencia del promedio de ese conjunto de datos en estudio.

EJEMPLO 1

Se presenta la siguiente información en la tabla de distribución de variables discretas

x	$P(x)$	μ	$X-\mu$	$(X-\mu)^2$	σ^2
0	0,24	0.00	-1,14	1,30	0,3097
1	0,44	0,44	-0,14	0,02	0,0086
2	0,27	0,54	0,86	0,74	0,1986
3	0,05	0,16	1,86	3,46	0,1898
Total	**1**	**1,14**			**0,7068**

Tabla 6. *Tabla de distribución de variabilidad para datos discretos*

Si utilizamos las fórmulas de variabilidad de una distribución discreta que se trabajó en el tema anterior, los resultados correspondientes son:

$$\boldsymbol{\mu = 1,14} \qquad \boldsymbol{\sigma^2 = 0,7068} \qquad \boldsymbol{\sigma = \sqrt{0,7068} = 0,8406}$$

Entonces, dando seguimiento al tema de distribución binomial, las fórmulas establecidas para este tipo de distribución dicotómica se trabajarán según la información brindada en la tabla 6.

EJEMPLO 1.1

La probabilidad de que un edificio seleccionado aleatoriamente esté asegurado es de 0,38. calcular el espacio muestral de las probabilidades de que los edificios de una muestra de 3 estén asegurados.

Iniciaremos con el cálculo de la probabilidad para cada uno de los tres edificios que se tomaron en la muestra.

$\boldsymbol{p}: edificio\ asegurado = \mathbf{0,38}$
$\boldsymbol{q}: edificio\ no\ asegurado = \mathbf{0,62}$
$\boldsymbol{n} = \mathbf{3} \qquad \boldsymbol{x} = \{\mathbf{0,1,2,3}\}$

Cálculo de la probabilidad

$$\left.\begin{aligned}
P(0) &= (3C0)(0{,}38)^0(0{,}62)^{3-0} = 0{,}2383 \approx \mathbf{0,24}\\
P(1) &= (3C1)(0{,}38)^1(0{,}62)^{3-1} = 0{,}4382 \approx \mathbf{0,44}\\
P(2) &= (3C2)(0{,}38)^2(0{,}62)^{3-2} = 0{,}2685 \approx \mathbf{0,27}\\
P(3) &= (3C3)(0{,}38)^3(0{,}62)^{3-3} = 0{,}0548 \approx \mathbf{0,05}
\end{aligned}\right\}$$

Estos son los mismos valores de la probabilidad que indica la segunda columna en la tabla 6.

Cálculo de la media

$\mu = n \cdot p = 3 \cdot 0{,}38$
$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1,14} \longrightarrow$

Este es el mismo valor de la media que indica la sumatoria de la tercera columna en la tabla 6.

Cálculo de la varianza

$\sigma^2 = \mu \cdot q = 1{,}14 \cdot 0{,}62$
$\boldsymbol{\sigma^2} = \mathbf{0,7068} \longrightarrow$

Este es el mismo valor de la varianza que indica la sumatoria de la última columna en la tabla 6.

Cálculo de la desviación estándar

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}7068}$
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0,8407} \longrightarrow$

Este es el mismo valor de la desviación estándar que indica la información adjunta en la tabla 6.

Conclusión

Toda distribución de variable discreta puede trabajar con la tabla de valores de dispersión, pero cada distribución posee sus fórmulas respectivas, esto a manera de simplificación aritmética y de procesos, por tanto, se concluye los mismos resultados para cada una de las técnicas propuestas en la resolución de los ejercicios aplicativos, de aquí en adelante para cada distribución de probabilidad se trabajará con sus fórmulas respectivas o propuestas en este folleto de estudio.

c. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson lleva el nombre del matemático francés Simeon Denis Poisson (1781-1840), quien publicó su derivación en 1837, esta distribución está dada por la siguiente función:

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}}$$

Datos:

$e = 2{,}71828\ (constante\ matemática\ de\ Euler)$

$\lambda: Lambda\ (letra\ griega\ que\ representa\ la\ media)$

$x: valor\ de\ la\ variable\ en\ estudio$

La distribución de Poisson es útil para determinar probabilidades de fenómenos que ocurren en un contínuo espacio o de tiempo, como ejemplo los defectos en un rollo de tela, erratas en las páginas de un libro, número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador por intervalo, personas que llegan a hacer fila ante una ventanilla de atención al público, de hecho, este último caso representa una situación especial que se estudia con detenimiento en un área matemática que se denomina investigación de operaciones, en un tema que se conoce como “teoría de colas” o “teoría de líneas de espera”, donde el uso de la distribución de Poisson ocupa un lugar preponderante.

Las características de una variable aleatoria Poisson son:

- El experimento aleatorio consiste en contar el número de veces que ocurre el evento en una unidad determinada de espacio o de tiempo.
- Las ocurrencias de los eventos son mutuamente independientes.
- La probabilidad de ocurrencia es igual para todos los eventos.
- En una unidad de espacio o de tiempo muy reducida, la probabilidad de ocurrencia de más de un evento es tan pequeña que es prácticamente despreciable.

Media y varianza de la distribución de Poisson

Es posible calcular la media aritmética y la desviación estándar de cualquier distribución de probabilidad siguiendo los procedimientos y que las distribuciones de probabilidad se pueden resumir mediante las siguientes fórmulas cuya media aritmética corresponde a la siguiente:

$$\boldsymbol{E(x) = \mu = \lambda = n \cdot p}$$

La fórmula de la varianza de la distribución de Poisson corresponde a la misma fórmula de la media:

$$\boldsymbol{Var(x) = \sigma^2 = \lambda = \mu}$$
$$\boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p}$$

La fórmula de la desviación estándar de la distribución de Poisson corresponde a:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\mu}}$$
$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p}}$$

A continuación, algunos ejemplos aplicativos para esta distribución de probabilidad de Poisson.

EJEMPLO 1

Un libro de 500 páginas tiene 50 errores de impresión distribuidos aleatoriamente. Calcule la probabilidad de que cualquier página elegida al azar tenga un error.

Solución:

Datos

$p: probabilidad\ de\ éxito = 50\ errores\ de\ impresión$

$n = 500$

Para este caso el valor de la media de la distribución corresponde a:

$$\lambda = \frac{p}{n} = \frac{50}{500} = 0{,}10$$

Este valor lo que indica es que el libro tiene un promedio de 0,10 errores por página, entonces:

$$P(1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0,10} \cdot (0,10)^1}{1!} = 0,0905$$

La probabilidad de que una página escogida al azar y de manera aleatoria contenga un error de escritura es de 9,05%

EJEMPLO 2

Una empresa de aviación determinó que 1% de las personas que reservan cierto vuelo no se presentan. Por ello, decide vender 300 espacios para un avión que tiene 299 asientos. Calcule la probabilidad de que todas las personas que se presenten tengan asiento disponible, suponiendo que las llegadas de los pasajeros siguen una distribución de Poisson.

Solución:

Datos

$p: personas\ que\ no\ se\ presentan = 0,01$

$n = 300$

Para este caso el valor de la media de la distribución corresponde a:

$\lambda = p \cdot n = 300(0,01) = 3$

En promedio, tres personas faltan a la cita del vuelo.

En este caso, sería el promedio de personas que no se presentan para un conjunto de reservaciones de 300, entonces, ¿Cuál es la propabilidad de que no falte a la cita alguna persona de las 300?, ¿Cuál es la probabilidad de que falte una persona a la cita?

$$P(0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3} \cdot (3)^0}{0!} = 0,049787 \approx 0,0498$$

La probabilidad de que no falte algún pasajero es de 4,98%

$$P(1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3} \cdot (3)^1}{1!} = 0,149361 \approx 0,1494$$

La probabilidad de que falte un pasajero es de 14,94%

Como los únicos casos en los que no todos los pasajeros obtienen asiento es cuando no falta ninguno o sólo falta uno, la probabilidad de que todas las personas que se presenten tengan asiento disponible es:

$$P(x > 1) = P(2) + P(3) + \cdots + P(150)$$
$$P(x > 1) = 1 - \ [P(0) + P(1)]$$
$$P(x > 1) = 1 - [0{,}0498 + 0{,}1494]$$
$$P(x > 1) = 0{,}800852 \approx 0{,}8009$$

La probabilidad de que todas las personas que se presenten tengan asiento disponible corresponde a 80,09%.

d. Distribución Hipergeométrica

La distribución hipergeométrica se aplica cuando se tienen dos resultados posibles y cuando la probabilidad "p" sí cambia de un ensayo a otro, lo contrario de las dos distribuciones anteriormente desarrolladas.

La fórmula de la distribución hipergeométrica de probabilidad es la siguiente:

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{(C_x^S) \cdot (C_{n-x}^{N-S})}{C_n^N}}$$

Donde:

C: *símbolo de combinación*

N: *elementos de la población*

S: *elementos de interés de la población*

n: *elementos de la muestra*

x: *variable en estudio*

Media y varianza de la distribución hipergeométrica

Para la distribución de probabilidad hipergeométrica la fórmula de la media está determinada por

$$\mu = \frac{elementos\ de\ interés\ de\ la\ población \cdot variable\ en\ estudio}{elementos\ de\ la\ población}$$

$$\boldsymbol{\mu = \frac{S \cdot x}{N}}$$

Para la distribución de probabilidad hipergeométrica la fórmula de la varianza está determinada por

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{n \cdot S \cdot (N - S) \cdot (N - n)}{N^2 \cdot (N - 1)}}$$

Consecuentemente la fórmula de la desviación estándar corresponde a

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{n \cdot S \cdot (N - S) \cdot (N - n)}}{\boldsymbol{N^2 \cdot (N - 1)}}}$$

EJEMPLO 1

Una caja de 10 focos contiene 2 focos defectuosos (D) y 8 no defectuosos (N). Si se eligen al azar aleatoriamente 3 focos de la caja, ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra contenga exactamente un foco defectuoso?, ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra un foco no tenga defecto alguno?

Solución:

En primer lugar, es importante observar que se cumplen las dos características que hacen que este experimento aleatorio corresponda a una distribución hipergeométrica: se trata de una variable con dos resultados posibles (D o N) y las probabilidades cambian en cada extracción: en la primera, la probabilidad de foco defectuoso es $\frac{2}{10} = 0{,}20$, la probabilidad de algún foco defectuoso en la segunda extracción cambia; si el primer foco es defectuoso, la probabilidad de focos defectuosos en la segunda extracción es de $\frac{1}{9} = 0{,}11$, y el primero es no defectuoso, esta probabilidad es de $\frac{2}{9} = 0{,}22$. La solución en este caso corresponde al planteamiento siguiente:

DATOS	
FOCOS CON DEFECTOS	**FOCOS SIN DEFECTOS**
$N = 10$	$N = 10$
$S_D = 2$	$S_N = 8$
$n = 3$	$n = 3$
$x = 1$	$x = 1$

Focos con defecto

$$P(1) = \frac{(C_1^2) \cdot (C_{3-1}^{10-2})}{C_3^{10}}$$

$$P(1) = \frac{(C_1^2) \cdot (C_2^8)}{C_3^{10}}$$

$$P(1) = 0{,}466666$$

$$P(1) \approx 0{,}47$$

La probabilidad de que exista sólo un foco con defecto en la muestra extraída es de 47% aproximadamente.

Focos sin defectos

$$P(1) = \frac{(C_1^8) \cdot (C_{3-1}^{10-8})}{C_3^{10}}$$

$$P(1) = \frac{(C_1^8) \cdot (C_2^2)}{C_3^{10}}$$

$$P(1) = 0{,}066666$$

$$P(1) \approx 0{,}07$$

La probabilidad de que exista sólo un foco sin defecto en la muestra extraída es de 7% aproximadamente.

EJEMPLO 2

Una empresa agroalimentaria está realizando un estudio de mercadeo para posicionar dos tipos de aderezos al mercado, se preguntó a 50 personas qué aderezo les gustaba más, 32 respondieron que el aderezo verde y 18 que el aderezo rojo. Si se toma una muestra del 10%, ¿Cuál es la probailidad de que una persona de la muestra prefiera aderezo verde? Determine el promedio de las personas que prefirió el aderezo verde y determine la varianza y desviación estándar de las personas que prefirió el aderezo rojo.

Preferencia de Aderezos	
Aderezo Verde	**Aderezo Rojo**
$N = 50$	$N = 50$
$S_V = 32$	$S_R = 18$
$n = 5$	$n = 5$
$x = 1$	-

$$P(1\ verde) = \frac{(C_1^{32}) \cdot (C_{5-1}^{50-32})}{C_5^{50}}$$

$$P(1\ verde) = \frac{(C_1^{32}) \cdot (C_4^{18})}{C_5^{50}}$$

$$P(1\ verde) = 0{,}0462157$$

$$\boldsymbol{P(1\ verde) \approx 0{,}0462}$$

La probabilidad de que una persona de la muestra prefiera consumir aderezo verde es de 4,62%.

$$\mu = \frac{S \cdot x}{N}$$

$$\boldsymbol{\mu = \frac{32 \cdot 5}{50} = 3,2}$$

3,2 personas en promedio de cada 5 prefieren el aderezo verde

$$\sigma^2 = \frac{n \cdot S \cdot (N - S) \cdot (N - n)}{N^2 \cdot (N - 1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{5 \cdot 18 \cdot (50 - 18) \cdot (50 - 5)}{50^2 \cdot (50 - 1)}$$

$\boldsymbol{\sigma^2 = 1,0579592}$ **Varianza**

$$\sigma = \sqrt{1,0579592}$$

$\boldsymbol{\sigma = 1,028571}$ **Desviación estándar**

II. DISTRIBUCIONES CONTÍNUAS DE PROBABILIDAD

Las características que distinguen a las distribuciones continuas es que los resultados posibles no se obtienen contando, sino midiendo, lo cual hace posible obtener observaciones tan precisas que se pierde la diferencia entre observaciones consecutivas, el único impedimento para lograr mediciones extremadamente precisas es el instrumento con que se toman, pero la posibilidad de lograrlo persiste, así, como en una línea continua existe un número infinito de puntos, esto desde la teoría del matemático René Descartes, donde cita en uno de sus libros *"…para estudiar el comportamiento de los números reales basta tomar la distancia que existe del 0 al 1, ya que, en esta poca distancia existen infinitos valores"*, por tanto, no es posible determinar la probabilidad de que se presente un valor específico, es decir, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los infinitos resultados posibles, por lo que es necesario manejar la probabilidad de que una medición determinada se encuentre dentro de un intervalo de valores.

A diferencia de las distribuciones discretas, cuyas gráficas se presentan como diagramas de barras, las gráficas de las distribuciones continuas son líneas suavizadas, como las de la campana de la distribución normal, que es la más importante de todas las distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas y que es el principal tema de este folleto de estudio, donde se analiza también aquí otra importante distribución continua de probabilidad, la distribución exponencial.

a. Distribución Exponencial

Una variable aleatoria exponencial se da, por ejemplo, en el caso de un aparato electrónico que tiene la misma probabilidad de descomponerse en cualquier periodo de su vida útil (cualquier hora, cualquier día, etc.), desde nuevo y hasta el momento en el que realmente se produce el daño. Cuando se tiene esta probabilidad constante, se dice que hay una tasa constante de daño y el comportamiento de una variable aleatoria de este tipo sigue la distribución exponencial de probabilidad. Otros ejemplos de variables aleatorias que siguen a esta distribución exponencial de probabilidad son:

Tasa constante:
Cuando existe la misma probabilidad de que suceda un evento en cualquier momento dado.

- El tiempo que transcurre entre la llegada de llamadas a un conmutador telefónico.
- El tiempo que transcurre entre accidentes vehiculares en una intersección de calles.
- La ploriferación de un virus cuando no ha sido convatido en la variable tiempo.
- El tiempo que transcurre entre la llegada de llamadas a un teléfono de emergencias.
- La longitud que hay entre defectos en un rollo de una banda manufacturera industrial.

Si una variable aleatoria se distribuye en forma exponencial con parámetro λ, su función de densidad de probabilidad corresponde a la siguiente:

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, para\ x > 0\ y\ \lambda > 0}$$

La función de probabilidad acumulada se representa por las siguientes observaciones:

i. Probabilidad acumulada para un valor $x \leq a$, donde $a > 0$

$$\boldsymbol{f(x \leq a) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}}$$

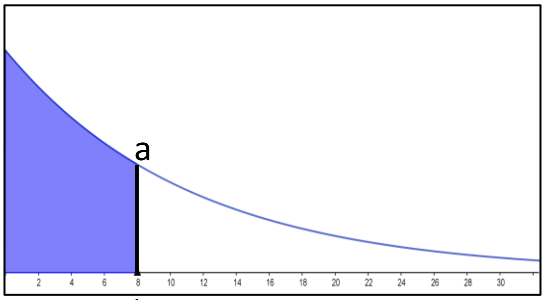


Figura 1. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo menor que un valor a*

ii. **Probabilidad acumulada para un valor $x \geq a$, donde $a > 0$**

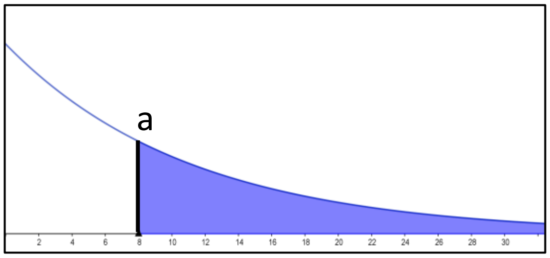


Figura 2. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo mayor que un valor a*

$$f(x \geq a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot x}\right)$$
$$f(x \geq a) = 1 - 1 + e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\boldsymbol{f(x \geq a) = e^{-\lambda \cdot x}}$$

iii. **Probabilidad acumulada para un intervalo definido $a \leq x \leq b$ donde $a > 0, b > 0$ y $a < b$**

$$P(a \leq x \leq b) = \left(1 - e^{-\lambda \cdot b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda \cdot a}\right)$$
$$P(a \leq x \leq b) = 1 - e^{-\lambda \cdot b} - 1 + e^{-\lambda \cdot a}$$
$$P(a \leq x \leq b) = -e^{-\lambda \cdot b} + e^{-\lambda \cdot a}$$

$$\boldsymbol{P(a \leq x \leq b) = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b}}$$

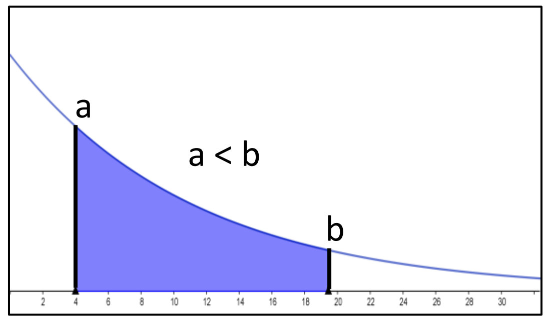


Figura 3. *Representación del área bajo la curva de la distribución exponencial de un intervalo definido*

Media y varianza de la distribución exponencial

$$\boxed{\boldsymbol{\mu = \sigma}} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mu = \dfrac{1}{\lambda}} \longrightarrow \text{media} \\ \boldsymbol{\sigma = \dfrac{1}{\lambda}} \longrightarrow \text{Desviación estándar} \end{cases}$$

Se define que el valor de la media y el valor de la desviación estándar son equivalentes (igual valor), entonces, la varianza se define con la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} \longrightarrow \text{Varianza}$$

EJEMPLO 1

Un fabricante de televisores trata de determinar la duración de la garantía que debe ofrecer a sus clientes para un modelo nuevo, las pruebas realizadas muestran que los años de vida útil de esos aparatos sigue una distribución exponencial con $\lambda = 0{,}10$.

a. Determine la media y la desviación estándar de la vida útil de esos televisores.

$$\boldsymbol{\lambda = 0,10}$$

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,10} = 10} \qquad \Bigg| \qquad \boldsymbol{\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,10} = 10}$$

El promedio de vida útil y la desviación estándar de los televisores es de 10 años.

b. Si se da una garantía de 3 años, ¿Qué proporción de los aparatos se reemplazará, asumiendo que el modelo propuesto es correcto?

$$f(x \leq 3) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$f(x \leq 3) = 1 - e^{-0,1 \cdot 3}$$

$$\boldsymbol{f(x \leq 3) = 0,259181}$$

La proporción de los aparatos que se remplaza en los primeros 3 años es de 25,92% aproximadamente.

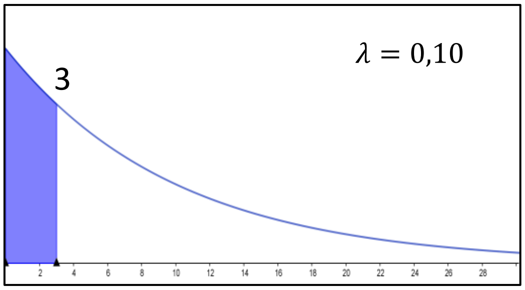


Figura 4. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo menor o igual que 3.*

c. Encuentre la probabilidad de que la vida útil de uno de esos televisores esté dentro del intervalo $\mu \pm 1\sigma$.

$$x_1 = \mu - 1 \cdot \sigma \qquad x_2 = \mu + 1 \cdot \sigma$$

$$x_1 = 10 - 1 \cdot 10 \qquad x_2 = 10 + 1 \cdot 10$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

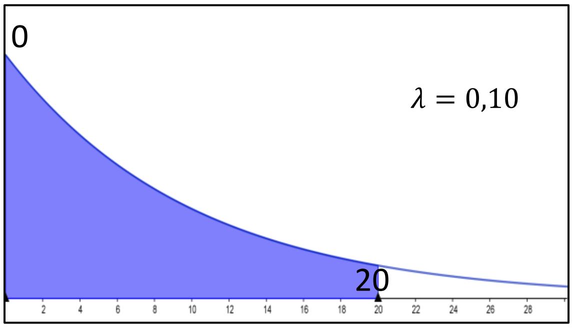


Figura 5. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo menor o igual que 20.*

$$f(x \leq 20) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$f(x \leq 20) = 1 - e^{-0,1 \cdot 20}$$

$$\boldsymbol{f(x \leq 20) = 0,864664}$$

La probabilidad de la vida útil de uno de esos televisores que se encuentra dentro del intervalo de 0 a 20 años corresponde a un 86,47% aproximadamente.

EJEMPLO 2

El tiempo que se tarda en tomar el pedido un cliente en un restaurante que brinda autoservicio es de 7 minutos en promedio.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente deba esperar 3 minutos o menos?

Valor de lambda

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{7} = 0{,}1429$$

$$f(x \leq 3) = 1 - e^{-0{,}1429 \cdot 3}$$

$$f(x \leq 3) = 0{,}3486$$

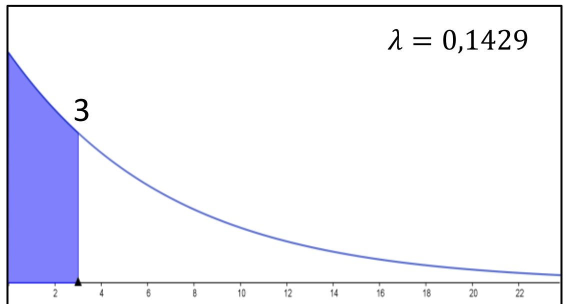


Figura 6. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo menor o igual que 3.*

La probabilidad de que un cliente deba esperar 3 minutos o menos para ser atendido en el autoservicio de un restaurante es de 34,86%.

b. ¿Qué probabilidad hay de que un cliente deba esperar entre 6 a 9 minutos?

Valor de lambda

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{7} = 0{,}1429$$

$$f(6 \leq x \leq 9) = e^{-0{,}1429 \cdot 6} - e^{-0{,}1429 \cdot 9}$$

$$f(6 \leq x \leq 9) = 0{,}1479$$

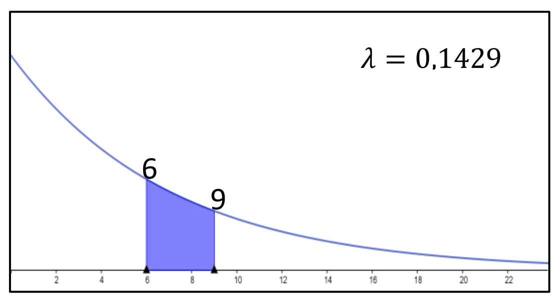


Figura 7. *Área bajo la curva de la distribución exponencial para un intervalo definido.*

La probabilidad de que un cliente deba esperar entre 6 a 9 minutos para ser atendido en el autoservicio de un restaurante es de 14,79%.

b. Distribución Normal

La función de densidad de esta distribución fue publicada por primera vez por Abraham de Moivre (1667-1754) en 1733 y la desarrolló como una aproximación de la distribución binomial; posteriormente Pierre Simon, Marqués de Laplace (1749-1827), la usó en 1783 para estudiar errores de medición; en 1809, Kart Friederich Gauss (1777-1855) la usó en el análisis de datos astronómicos.

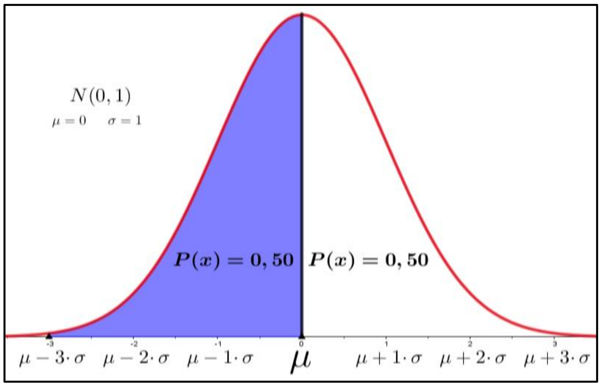


Figura 8. *Representación del 50% de probabilidad por debajo y por encima de la media del área bajo la curva*

En las distribuciones continuas de probabilidad, como la normal, las probabilidades se representan en la misma forma gráfica, como porciones de área que se encuentran entre dos líneas verticales, por encima del eje horizontal y por debajo de la gráfica de la función de la distribución.

La distribución normal es la más importante de las distribuciones continuas, tiene forma de campana y es la base primordial para los próximos temas que se deben abordar, como por ejemplo: la distribución muestral, planteamiento de hipótesis, intervalos de aceptación y de rechazo, función de la distribución Chí-Cuadrada y entre otras aplicaciones.

En donde e y π son las conocidas constantes matemáticas cuyos valores aproximados son 2,71828 y 3,1416, respectivamente, σ es la desviación estándar de la distribución y μ es su media o promedio aritmético. Como la cantidad posible de combinaciones de valores de estas dos medidas es infinita, se tiene entonces que hay una cantidad infinita de distribuciones normales, cada una de ellas definida por el valor específico de su media aritmética y de su desviación estándar.

Con esta función de densidad se pueden calcular probabilidades de áreas bajo la curva normal y sobre el eje x, entre dos valores (intervalo de valor mínimo y valor máximo) determinado de x. Para hacer esto se requiere utilizar procedimientos de cálculo integral fuera del alcance de este curso; sin embargo, existen valores tabulados de estas áreas que se incluyen en este folleto (Ver apartado de apéndice) para que sea fácil consultarlas y cuya utilización se explica en la sección siguiente.

Considerando la fórmula de densidad para la distribución normal, se hace incapié a la aplicación de la siguiente fórmula para determinar la altura (escala de valores del "eje y" donde se denota el punto máximo de la distribución), entonces, se determina la siguiente fórmula para dicha aplicación de la densidad:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}$$

EJEMPLO 1

Se sabe que el ciclo de vida de un tipo de bacterias sigue una distribución normal con una media de 200 horas y una desviación estándar de 20 horas.

Solución:

En este ejemplo el objetivo es determinar la altura de la campana de la distribución de Gauss y no determinar un intervalo del área bajo la curva, para este segundo punto se trabajará más adelante en los apartados.

Datos:

$\mu = 200\ horas$

$\sigma = 20\ horas$

$\pi = 3{,}1416$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (20)^2}}$$

$$f(x) = 0{,}019947$$

$$\boldsymbol{f(x) \approx 0{,}02}$$

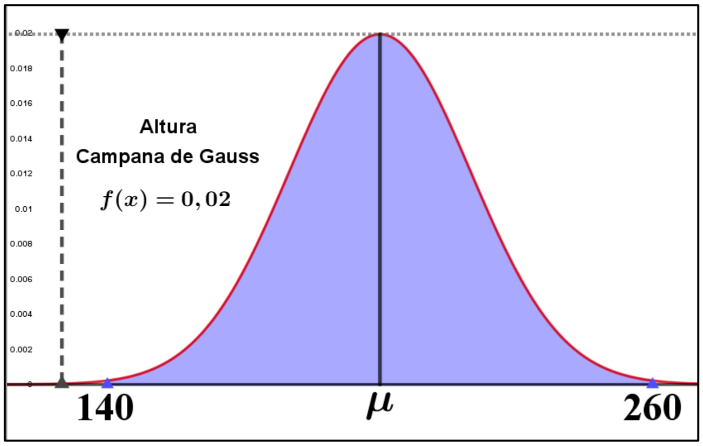


Figura 9. *Representación de la campana de Gauss aplicando la formula de densidad para determiner la altura de la distribución*

Se recomienda aplicar esta técnica cuando se deba realizar la gráfica de la distribución normal, o bien, algunas aplicaciones estadísticas cuentan con este cálculo para un mejor análisis de los procesos estadísticos.

Características de la distribución normal

La forma gráfica de esta distribución implica varias propiedades:

1. Tiene forma de campana, la media, la mediana y la moda son iguales y se localizan en el centro de la distribución.
2. Es simétrica, respecto de la media.
3. La probabilidad por debajo de la media es igual a la probabilidad por encima de la media.
4. La distribución normal es asintótica, no corta el eje “x” y se extiende infinitamente en ambos extremos.
5. La localización (punto medio) de una distribución normal se determina a través de la media ($\boldsymbol{\mu}$).

6. La dispersión o propagación (distancia) de la distribución normal se determina por medio de la desviación estándar ($\boldsymbol{\sigma}$).
7. Trabaja con la tabla de áreas bajo la curva normal.
8. La forma de la distribución normal también implica que la mayor parte de las observaciones están cerca del centro (de ahí que la parte más alta de la curva está precisamente en medio), y se aplanan entre más alejados del centro se encuentren los puntos en ambos sentidos, muchas variables aleatorias tienen estas características.

Como se muestra en la figura 10, la superficie que se encuentra entre las dos rayas verticales trazadas sobre la media y una desviación estándar por debajo de la media y una desviación estándar por encima de la media hace referencia a la probabilidad de $P(\mu \pm 1 \cdot \sigma) = 0{,}6826$, que es el área que se ilustra en color azul bajo la curva. Como se indicó en una de las características de la distribución normal, esta distribución tiene un comportamiento simétrico, esto quiere decir que, por definición la distancia que existe de una desviación estándar por debajo de la media es la misma distancia que existe a una desviación por encima de la media, que se representa de la siguiente forma:

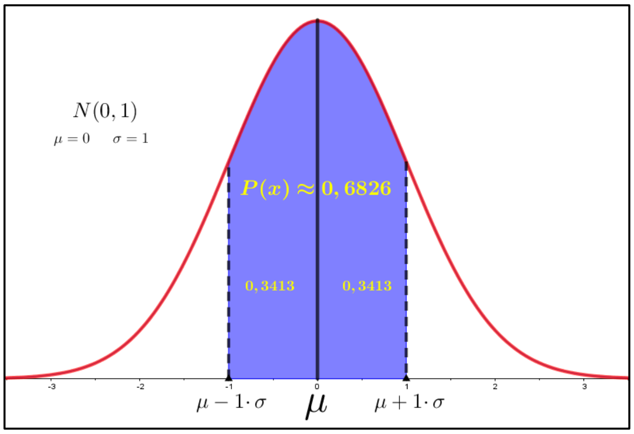


Figura 10. *Representación del área bajo la curva normal alrededor de más menos 1 desviación estándar ($\pm 1\sigma$) con respecto a la media.*

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma) = 0{,}3413 \qquad\qquad P(\mu + 1 \cdot \sigma) = 0{,}3413$$

$$P(\mu \pm 1 \cdot \sigma) = P(\mu - 1 \cdot \sigma) + P(\mu + 1 \cdot \sigma)$$

$$\boldsymbol{P(\mu \pm 1 \cdot \sigma) = 0,6826}$$

Como se muestra en la figura 11, la superficie que se encuentra entre las dos rayas verticales trazadas sobre la media y dos desviaciones estándar por debajo de la media y dos desviaciones estándar por encima de la media hace referencia a la probabilidad de $P(\mu \pm 2 \cdot \sigma) = 0{,}9544$, que es el área que se ilustra en color azul bajo la curva. Como se indicó en una de las características de la distribución normal, esta distribución tiene un comportamiento simétrico, esto quiere decir que, por definición la distancia que existe de dos desviaciones estándar por debajo de la media es la misma distancia que existe a dos desviaciones estándar por encima de la

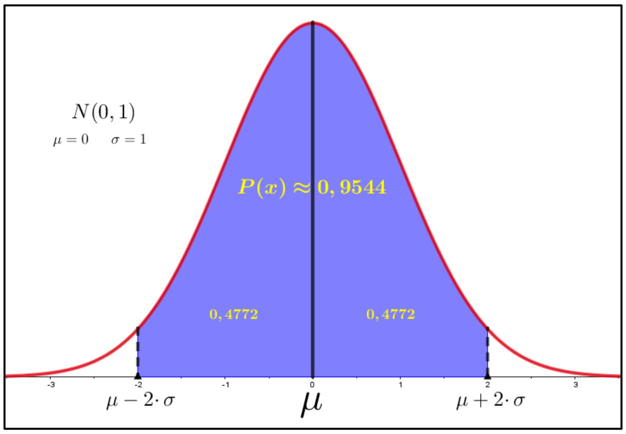


Figura 11. *Representación del área bajo la curva normal alrededor de más menos 2 desviaciones estándar ($\pm 2\sigma$) con respecto a la media.*

media, que se representa de la siguiente forma:

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma) = 0{,}4772 \qquad\qquad P(\mu + 2 \cdot \sigma) = 0{,}4772$$

$$P(\mu \pm 2 \cdot \sigma) = P(\mu - 2 \cdot \sigma) + P(\mu + 2 \cdot \sigma)$$

$$\boldsymbol{P(\mu \pm 2 \cdot \sigma) = 0{,}9544}$$

Como se muestra en la figura 12, la superficie que se encuentra entre las dos rayas verticales trazadas sobre la media y tres desviaciones estándar por debajo de la media y tres desviaciones estándar por encima de la media hace referencia a la probabilidad de $P(\mu \pm 3 \cdot \sigma) = 0{,}9974$, que es el área que se ilustra en color azul bajo la curva. Como se indicó en una de las características de la distribución normal, esta distribución tiene un comportamiento simétrico, esto quiere decir que, por definición la distancia que existe de tres desviaciones estándar por debajo de la media es la misma distancia que existe a tres desviaciones estándar por encima de la media, que se representa de la siguiente forma:

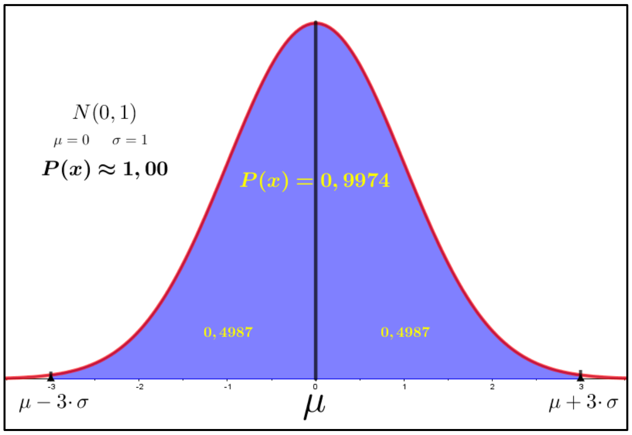


Figura 12. *Representación del área bajo la curva normal alrededor de más menos 3 desviaciones estándar ($\pm 3\sigma$) con respecto a la media.*

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma) = 0{,}4987 \qquad\qquad P(\mu + 3 \cdot \sigma) = 0{,}4987$$

$$P(\mu \pm 3 \cdot \sigma) = P(\mu - 3 \cdot \sigma) + P(\mu + 3 \cdot \sigma)$$

$$\boldsymbol{P(\mu \pm 3 \cdot \sigma) = 0{,}9974}$$

Algunos ejemplos de las numerosas variables aleatorias que tienen la característica de agruparse mayoritariamente alrededor de la media son mediciones en seres vivos, como la estatura: la mayor parte de las personas y de los animales en general son medianos; hay algunos altos y muy pocos muy altos, de la misma manera que hay algunos bajos de estatura y muy pocos, muy bajos, lo mismo sucede con otras variables como el peso; Otras ilustraciones se dan en el caso de procesos de producción; por ejemplo, en el llenado de botellas de refresco que contienen más o menos medio litro, es común que la mayor parte de las botellas tengan un contenido cercano al medio litro y que haya pocas que tengan 505 o 495 mililitros, lo mismo ocurre con alimentos enlatados, otros ejemplos de variables que suelen tener una distribución normal o aproximadamente normal, la longitud o peso de piezas metálicas troqueladas, la duración de llantas o focos en condiciones similares y otras aplicaciones.

Tal como se vio antes, la función de probabilidad para variables aleatorias discretas, como la Binomial o la de Poisson, calculan la probabilidad de ocurrencia de un resultado posible específico, mientras que, para variables contínuas como la normal, se tiene una función de densidad de probabilidad, donde esta función no se aplicará en este curso respectivo, pero sí es importante mencionarla, la fórmula correspondiente es la que se muestra a continuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot (e)^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

En este capítulo no se trabajará con esta fórmula de densidad, únicamente a modo de conocimiento, se trabajará con la fórmula de estandarización para los valores z y se aplicará la tabla respectiva para la distribución normal.

Tabla de áreas bajo la curva normal

Esta tabla permite encontrar cualquier área bajo la curva normal estándar delimitada entre dos puntos o valores críticos, quí es necesario recordar que esta distribución normal estándar se distingue porque su media es igual a 0 y su desviación estándar es igual a 1, además, como la distribución es simétrica y conociendo el área de una de las dos mitades, automáticamente se sabe el área de su contraparte, o bien, **se trabajará el área acumulada con una dirección de izquierda a derecha con respecto al eje horizontal o eje x (formato de la tabla adjunta en el apartado de apéndice)**.

El tipo más común de tabla de áreas bajo la curva normal es el que aparece en este folleto de estudio, esta tabla permite determinar valores de área (probabilidad) para porciones de la curva normal que se encuentran entre la media y un determinado valor de z, que representa la cantidad de desviaciones estándar a partir de la media. Nótese que se utiliza el símbolo "z" (la letra z minúscula) para representar las desviaciones estándar de la distribución normal estándar y que es la que se usa para estandarizar los valores de otras distribuciones normales con valores distintos a éstos para sus medias y sus desviaciones estándar, de manera que sea posible utilizar esta tabla de áreas para cualquier distribución normal.

La tabla contiene en la esquina superior izquierda la letra z, y en esa columna tiene valores que van de 0.0 y hasta 3.4 (tanto como valores negativos y positivos), los valores z negativos hace referencia a determinar la probabilidad por de bajo de la media (cola izquierda) y los valores z positivos hace referencia a determinar la probabilidad por encima de la media (cola derecha).

A continuación se representará a modo de ejemplo dos procesos para determinar la probabilidad en base al valor z.

EJEMPLO 1

Determine la probabilidad o área bajo la curva para $z = -1{,}46$

$$z = \overbrace{-1{,}4}^{Columna\ matríz} + \overbrace{0{,}06}^{Fila\ matríz} = -1{,}46$$

$$\boldsymbol{P(z \leq -1{,}46) = 0{,}0721}$$

Un valor z siempre trabajará el área acumulada bajo la curva, con una dirección de izquierda a derecha (ver gráfica en la parte superior de la tabla adjunta).

EJEMPLO 2

Determine la probabilidad o área bajo la curva para $z = 2{,}03$

$$z = \overbrace{2{,}0}^{Columna\ matríz} + \overbrace{0{,}03}^{Fila\ matríz} = 2{,}03$$

$$\boldsymbol{P(z \leq 2{,}03) = 0{,}9788}$$

Un valor z siempre trabajará el área acumulada bajo la curva, con una dirección de izquierda a derecha (ver gráfica en la parte superior de la tabla adjunta).

Las tablas de valores z para determinar el área bajo la curva las puede consultar en el apartado de apéndice del presente folleto.

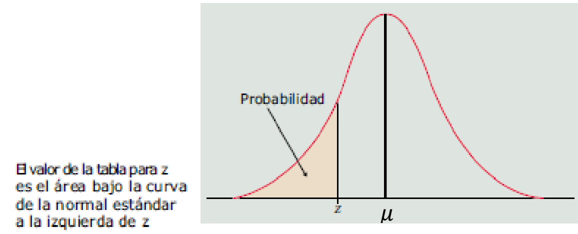


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	[illegible]	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	[illegible]	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	[illegible]	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	[illegible]	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	[illegible]	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	[illegible]	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	[illegible]	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	[illegible]	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	[illegible]	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	[illegible]	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	[illegible]	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	[illegible]	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	[illegible]	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	[illegible]	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	[illegible]	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	[illegible]	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	[illegible]	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	[illegible]	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	[illegible]	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	[illegible]	.0582	.0571	.0559
−1.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170

Figura 13. *Tabla de valores z negativos, guía para determinar el valor del área bajo la curva de la distribución normal.*

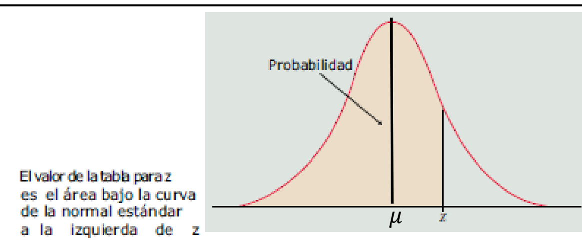


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	[illegible]	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	[illegible]	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	[illegible]	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	[illegible]	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	[illegible]	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	[illegible]	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	[illegible]	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	[illegible]	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	[illegible]	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	[illegible]	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	[illegible]	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	[illegible]	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	[illegible]	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	[illegible]	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	[illegible]	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	[illegible]	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	[illegible]	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	[illegible]	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	[illegible]	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	[illegible]	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952

Figura 14. *Tabla de valores z positivos, guía para determinar el valor del área bajo la curva de la distribución normal.*

Estandarización de probabilidades para toda distribución normal

En la sección anterior se vio cómo se pueden determinar áreas bajo la curva para cualquier porción de una distribución normal estándar, la que tiene media 0 y desviación estándar de 1, como es prácticamente infinita la cantidad de distribuciones normales que se pueden encontrar o construir combinando diferentes valores de la media y de la desviación estándar, para encontrar probabilidades en estos casos se debe estandarizar la medida, expresando la distancia entre el punto de interés "x", y la media correspondiente en unidades de la desviación estándar, la fórmula que se utiliza para la estandarización es la siguiente:

$$\boldsymbol{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

Donde:

z: $valor\ z\ para\ determinar\ la\ probabilidad\ de\ un\ evento\ contínuo$

x: $valor\ de\ la\ variable\ en\ estudio$

μ: $valor\ de\ la\ media\ de\ la\ distribución\ en\ estudio$

σ: $valor\ de\ la\ desvación\ estándar\ de\ la\ distribución\ en\ estudio$

EJEMPLO 1

El dueño de un edificio en la capital de Costa Rica renta locales, el promedio de renta es de \$1250 mensuales, con una desviación estándar de renta de \$150, los precios de renta van en función al tamaño del local. Determine lo que le solicita:

1. Determine la probabilidad que para la próxima temporada un local sea alquilado en \$975 o menos.

Datos:

$\mu = 1250\$$

$\sigma = 150\$$

$x = 975$

$P(x \leq 975) = ?$

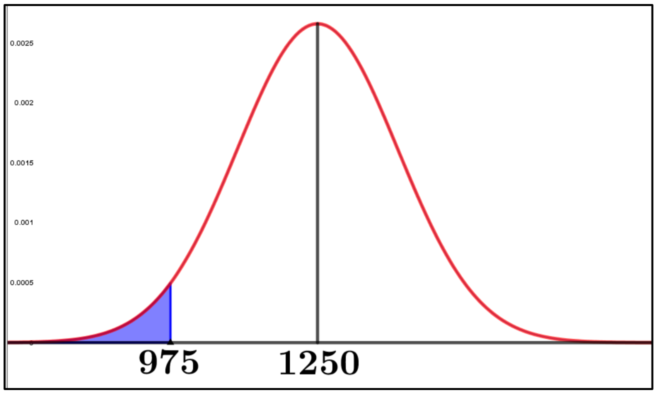


Figura 15. *Curva de la distribución normal* $N(1250{,}150)$.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{975 - 1250}{150} = -1{,}83$$

$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq -1{,}83) \longrightarrow$ Estandarización de la distribución

$$\boldsymbol{P(z \leq -1{,}83) = 0{,}0336}$$

La probabilidad de que un local sea alquilado la próxima temporada en \$975 o menos, es de un 3,36%.

2. El dueño del edificio desea hacer un análisis del costo de vida, por tanto solicita ayuda a un especialista en la materia, le consulta que según el costo de vida y los impuestos de renta en el país, ¿Cuál es la probabilidad de que un local sea rentado en $1575 o menos para el próximo mes.

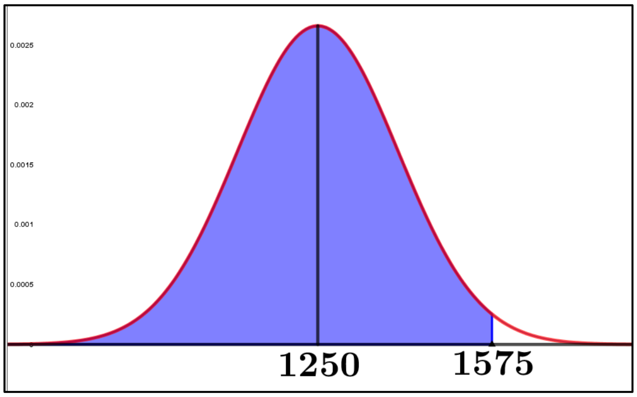


Figura 16. Curva de la distribución normal $N(1250{,}150)$.

Datos:

$\mu = 1250\$$

$\sigma = 150\$$

$x = 1575\$$

$P(x \leq 1575) = ?$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1575-1250}{150} = 2{,}17$$

$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq 2{,}17)$

$\boldsymbol{P(z \leq 2,17) = 0,9850}$

La probabilidad de que un local sea alquilado la próxima temporada en $1575 o menos, es de un 98,50%.

3. Un chef desea rentar un local, el día de la inspección previo al contrato el cliente observa que debe realizar algunas mejoras de mantenimiento al local, por tanto, el chef solicita un descuento de renta del 22% en base al precio de renta durante el primer año de contrato, esto por que el chef asume el costo de la remodelación del local, determine la probabilidad de que el dueño del edificio vea viable el descuento solicitado por el cliente.

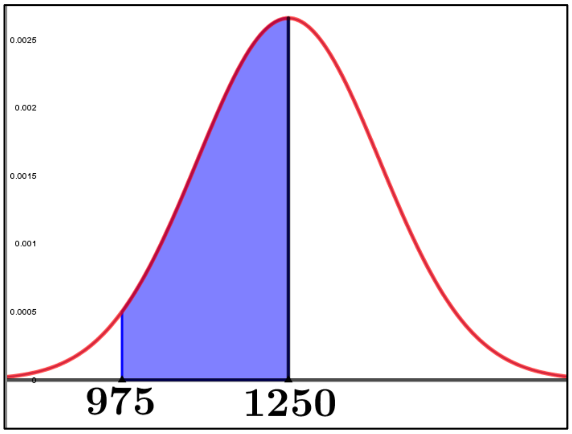


Figura 17. Curva de la distribución normal $N(1250{,}150)$.

Datos:

$\mu = 1250\$$

$\sigma = 150\$$

$x_1 = 1250 - 22\% = 975\$$

$x_2 = 1250\$$

$P(975 \leq x \leq 1250) = ?$

$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{975-1250}{150} = -1{,}83$$

$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq -1{,}83)$

$P(z \leq -1{,}83) = 0{,}0336$

$$z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{1250-1250}{150} = 0{,}00$$

$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq 0{,}00)$ $\quad P(z \leq 0{,}00) = 0{,}50$

$P(-1{,}83 \leq z \leq 0{,}00) = P(z_2) - P(z_1)$
$P(-1{,}83 \leq z \leq 0{,}00) = 0{,}50 - 0{,}0336$

$\boldsymbol{P(-1{,}83 \leq z \leq 0{,}00) = 0{,}4664}$

La probabilidad de que el dueño del edificio acepte el contrato con la condición propuesta por el cliente es de 46,64%, desde el punto de vista probabilístico se considera un evento probable, entonces, se evidencia una buena perspectiva para el cliente.

4. Determine la probabilidad de aumento en la renta en un 10% del promedio para el próximo semestre a un cliente que tiene una veterinaria en uno de sus locales principilaes de mayor frecuencia.

Datos:
$\mu = 1250\$$
$\sigma = 150\$$
$x_1 = 1250\$$
$x_2 = 1250 + 10\% = 1375\$$
$P(1250 \leq x \leq 1375) = ?$

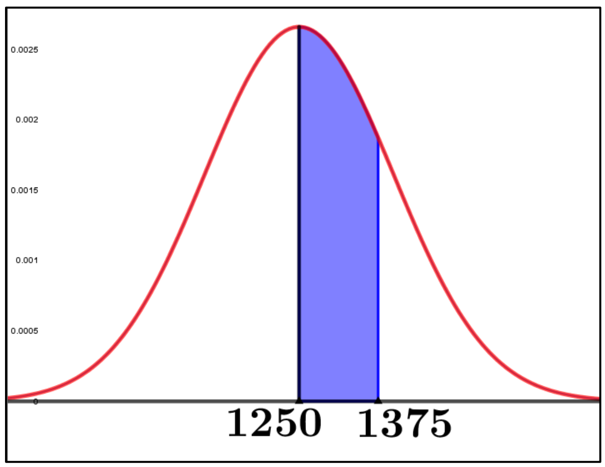


Figura 18. *Curva de la distribución normal $N(1250{,}150)$.*

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1250 - 1250}{150} = 0{,}00$$
$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq 0{,}00)$
$P(z \leq 0{,}00) = 0{,}50$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1375 - 1250}{150} = 0{,}83$$
$N(1250\,,150) \rightarrow P(z \leq 0{,}83)$
$P(z \leq 0{,}83) = 0{,}7967$

$P(0{,}00 \leq z \leq 0{,}83) = P(z_2) - P(z_1)$
$P(-1{,}83 \leq z \leq 0{,}00) = 0{,}7967 - 0{,}50$

$\boldsymbol{P(-1{,}83 \leq z \leq 0{,}00) = 0{,}2967}$

La probabilidad de que se aplique un aumento en la renta de un 10% para el próximo semestre es de 29,67%.

EJEMPLO 2

Las cajas de una marca de cereal contienen en promedio 85 gramos, con una desviación estándar de 2,5 gramos. Si se sabe que el proceso de llenado sigue una distribución normal. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja de cereal contenga más de 88,4 gramos?

Datos:

$\mu = 85\ g$

$\sigma = 2,5\ g$

$x = 88,4\ g$

$P(x > 88,4) = ?$

El complemento de un evento probabilístico corresponde a: $P(X > x_1) = 1 - P(X < x_1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{88,4 - 85}{2,5} = 1,36$$

$N(85\ ,2,5) \rightarrow P(z > 1,36)$

$P(z > 1,36) = 1 - 0,9131$

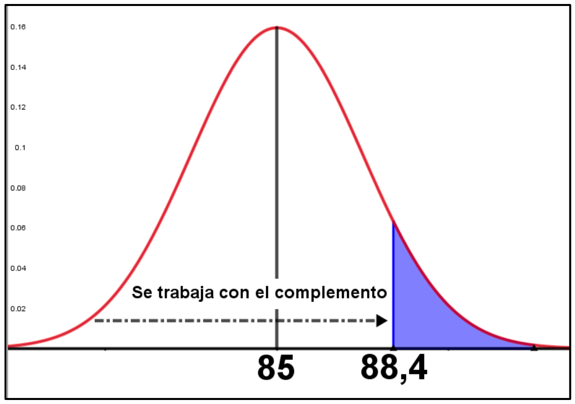


Figura 19. *Curva de la distribución normal* $N(85{,}2{,}5)$.

$$\boldsymbol{P(z > 1,36) = 0,0869}$$

La probabilidad de que una caja de cereal contenga más de 88,4 gramos del producto es de 8,69%.

¿Cuál es la probabilidad de que una caja de cereal contenga entre 86,9 gramos y 87,5 gramos?

Datos:

$\mu = 85\ g$

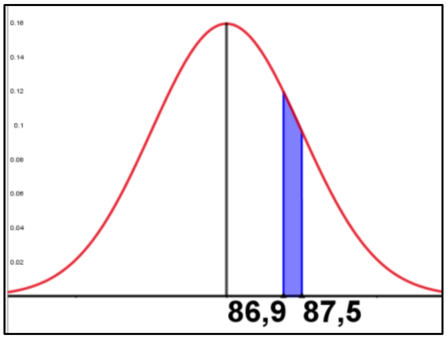
$\sigma = 2,5\ g$

$x_1 = 86,9\ g$

$x_2 = 87,5\ g$

$P(86,9 \leq x \leq 87,5) = ?$

Figura 20. *Curva de la distribución normal* $N(85{,}2{,}5)$.



$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{86,9 - 85}{2,5} = 0,76$$

$N(85\ ,2,5) \rightarrow P(z_1 \leq 0,76)$

$P(z_1 \leq 0,83) = 0,7764$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{87,5 - 85}{2,5} = 1,00$$

$N(85\ ,2,5) \rightarrow P(z_2 \leq 1,00)$

$P(z_2 \leq 1,00) = 0,8413$

$P(0,76 \leq z \leq 1,00) = P(z_2) - P(z_1)$

$P(0,76 \leq z \leq 1,00) = 0,8413 - 0,7764$

$$\boldsymbol{P(0,76 \leq z \leq 1,00) = 0,0649}$$

La probabilidad de que una caja de cereal contenga producto entre 86,9 gramos y 87,5 gramos es de 6,49%

EJEMPLO 3

En una envasadora de agua purificada se producen botellas que tienen, en promedio, medio litro de agua, con una desviación estándar de 5 ml (mililitros). Si se sabe por experiencia que la distribución de los contenidos de agua de estas botellas tiene distribución normal, determinar qué porcentaje de las botellas que se fabrican tiene entre 490 y 510 ml.

Solución:

Datos:

$\mu = 500\ ml$

$\sigma = 5\ ml$

$x_1 = 490\ ml$

$x_2 = 510\ ml$

$P(490 \leq x \leq 510) = ?$

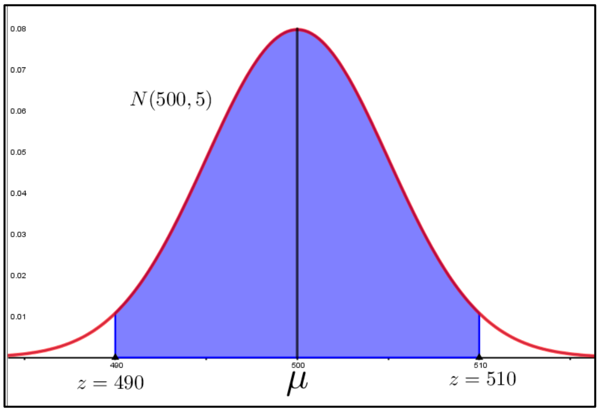


Figura 21. *Curva de la distribución normal* $N(500{,}5)$.

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{490 - 500}{5} = -2{,}00$$

$N(500\,,5) \rightarrow P(z_1 \leq -2{,}00)$

$P(z_1 \leq -2{,}00) = 0{,}0228$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{510 - 500}{5} = 2{,}00$$

$N(500\,,5) \rightarrow P(z_2 \leq 2{,}00)$ → Estandarización de una distribución

$P(z_2 \leq 2{,}00) = 0{,}9772$

$P(490 \leq x \leq 510) = P(-2 \leq z \leq 2)$

$P(-2 \leq z \leq 2) = P(z_2) - P(z_1)$

$P(-2 \leq z \leq 2) = 0{,}9772 - 0{,}0228$

$$\boldsymbol{P(-2 \leq z \leq 2) = 0{,}9544}$$

APÉNDICE

El valor de la tabla para los valores z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

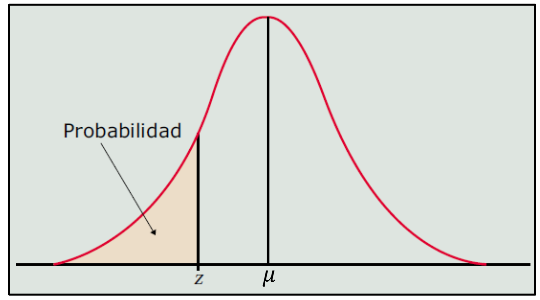


TABLA 1.A: Probabilidades de la normal estándar
Valores z negativo

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

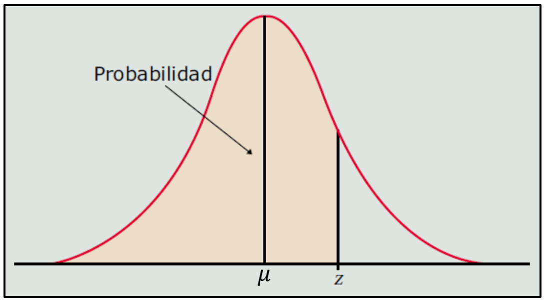


TABLA 1.B: Probabilidades de la normal estándar Valores z positivos (Continuación)										
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albert, J. H. y Rossman, A. (2011). Workshop Statistics. Discovery with data. A bayesian approach. Bowling Green, OH: Key College Publishing.

Díaz, A. (2013). Estadística aplicada a la administración y la economía. McGraw Hill. Méxio D.F., México.

Díaz, C. (2014). Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar. Universidad de Granada, España.

Díaz Rodríguez, M. (2019). Estadística inferencial aplicada. Universidad del Norte. https://elibro.net/es/lc/elibrocentroamerica/titulos/122378

Juan Verdoy, P. Joaquín Beltrán, M. y José Peris, M. (2016). Problemas resueltos de estadística aplicada a las ciencias sociales. Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions.https://elibro.net/es/lc/elibrocentroamerica/titulos/42351

Merino, J. M.; Moreno, E.; Padilla, M.; Rodríguez Miñon, P. y Villarino, A. (2012). Análisis de datos en psicología. Madrid: UNED.

Peña, D. y Romo, J. (2017) Introducción a la estadística para las ciencias sociales. Madrid: McGraw-Hill.

Puente Viedma, C. D. L. (2018). Estadística descriptiva e inferencial. Ediciones IDT. https://elibro.net/es/lc/elibrocentroamerica/titulos/59931

Serrano Angulo. J. (2013). Iniciación a la estadística bayesiana. Madrid: La Muralla.